

Alexandre Teixeira Ferraz

COMPARAÇÃO DA ADERÊNCIA DO MODELO DE BLACK-SCHOLES EM MERCADOS LÍQUIDOS E ILÍQUIDOS

Trabalho de Formatura apresentado à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo para
obtenção do diploma de Engenheiro de Produção

Alexandre Teixeira Ferraz

COMPARAÇÃO DA ADERÊNCIA DO MODELO DE BLACK-SCHOLES EM MERCADOS LÍQUIDOS E ILÍQUIDOS

Trabalho de Formatura apresentado à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo para
obtenção do diploma de Engenheiro de Produção

Orientador: Erik Eduardo Rego

Catalogação-na-publicação

Ferraz, Alexandre Teixeira

**Comparação da aderência do modelo Black-Scholes em
mercado líquidos e ilíquidos / A.T. Ferraz. – São Paulo, 2015.**

106p.

**Trabalho de Formatura – Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de
Produção.**

**1. Modelo Black-Scholes 2.Comparação de Volatilidades
3.Opções I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica.
Departamento de Engenharia de Produção II.t.**

Dedico este trabalho à minha família
que sempre me guiou e me apoiou.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Doutor Erik Eduardo Rego por acreditar em mim e aceitar me acompanhar no trabalho de formatura e também por toda a orientação, apoio e dedicação transmitidos ao longo do ano na elaboração e redação do trabalho.

Aos meus pais, irmão e avós pela influência, apoio e por estarem sempre presentes ao longo da minha graduação e compartilharem comigo o objetivo de me tornar um engenheiro.

À minha grande amiga e namorada Cinthia por estar sempre comigo ao longo da graduação e pelo apoio incondicional em todos os momentos durante esses cinco anos.

Ao meu grande amigo Leonardo por me ajudar diretamente com a revisão do trabalho e pela grande parceria desde que nos conhecemos.

RESUMO

Este trabalho propõe a comparação da aderência do modelo de Black-Scholes para precificação de opções em mercados líquidos e ilíquidos com o intuito de utilizar o modelo na negociação de volatilidade nesses mercados. Como a volatilidade implícita não ser um parâmetro diretamente observável no mercado financeiro, ela deve ser extraída das opções disponíveis a partir dos preços negociados, por um modelo de precificação. O modelo mais amplamente utilizado para precificação e determinação da volatilidade uma opção é o modelo de Black-Scholes, que se baseia no processo estocástico de Wiener, no lema de Itô e na volatilidade realizada do ativo subjacente para determinar o preço justo de uma opção. Neste trabalho, buscou-se comparar opções negociadas, tanto em mercados líquidos como ilíquidos, com o preço obtido pelo modelo Black-Scholes para aquela opção e determinar se houve alguma diferenciação de aderência do modelo entre as opções líquidas e as ilíquidas para concluir se o modelo pode ser usado da mesma maneira tanto para um mercado como para o outro. A comparação é relevante para a negociação de volatilidade no mercado financeiro, mostrando como diferentes opções devem ser tratadas pelos operadores. Os resultados indicaram diferenciação entre opções negociadas nos dois tipos diferentes de mercados. Particularmente as opções ilíquidas apresentaram menor aderência ao modelo Black-Scholes.

Palavras-chave: Modelo Black-Scholes. Comparação de Volatilidades. Opções.

ABSTRACT

This paper proposes the comparison of adherence of the Black-Scholes model for option pricing in liquid and illiquid markets in order to use the model for volatility trading in both markets. Since the implied volatility is not a directly observable market parameter, it must be obtained from the traded options, by a pricing model. The most broadly used model for pricing and volatility determination is the Black-Scholes, which is based in the Wiener stochastic process, Itô's Lema and the realized volatility for the underlying asset to determine a fair price for an option. This paper sought to compare options traded, both in liquid and illiquid markets, with the price obtained by the model for that particular option and conclude if there was an adherence differential between both kinds of markets. The comparison is relevant for volatility trading, determining how different options should be treated by traders. The results indicated there is a difference between the options traded in each of the markets. In particular, they showed the illiquid options have worst adherence to the model.

Keywords: Black-Scholes Model. Volatility Comparison. Options.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Lucro do Comprador de uma opção de compra - Fonte: autor	21
Figura 2 - Lucro do vendedor de uma opção de compra - Fonte: autor	22
Figura 3 - Lucro do comprador de uma opção de venda - Fonte: autor	23
Figura 4 - Lucro do vendedor de uma opção de venda - Fonte: autor	24
Figura 5 - Trava de alta - Fonte: autor	25
Figura 6 - Trava de baixa - Fonte: autor	26
Figura 7 - Forca - Fonte: autor	27
Figura 8 - Preço de opções de venda de diferentes preços de exercício - Fonte: autor	29
Figura 9 - Preço de opções de venda de diferentes prazos de exercício - Fonte: autor	30
Figura 10 - Preços de opções de venda sujeitas a diferentes volatilidades - Fonte: autor	30
Figura 11 - Opção sujeita à variação da taxa de juros - Fonte: autor	31
Figura 12 - Volatilidade realizada de PETR4 - Fonte: Bloomberg	33
Figura 13 - Preço da ação de PETR4 - Fonte: Bloomberg	33
Figura 14 - Volatilidade Implícita da ação de PETR4 - Fonte: Bloomberg	35
Figura 15 - Simulação de delta de uma opção 50% delta - Fonte: autor	36
Figura 16 - Posição comprada em gamma - Fonte: autor	40
Figura 17 - Posição vendida em gamma - Fonte: autor	41
Figura 18 - Decaimento de preço de uma opção no dinheiro com a passagem do tempo - Fonte: quantopia.net	44
Figura 19 - Trade Long Volatilidade – Fonte: Connolly (1997)	48
Figura 20 - Efeito do Theta sobre o preço de uma opção no decorrer do tempo – Fonte: Connolly (1997)	50
Figura 21 –Trade Short Volatilidade - Fonte: Connolly (1997)	52
Figura 22 - Exemplo de árvore binomial. Fonte: autor	56
Figura 23 - Exemplo de árvore binomial de dois nós. Fonte: autor	58
Figura 24 - Processo de Wiener Generalizado – Fonte: Hull, 2007	60
Figura 25 - Túnel de Rejeição - Fonte: BOVESPA	80
Figura 26 - Exemplo de túnel de preço - Fonte: Autor com dados Bovespa, 2015	81
Figura 27- Plotagem da análise das opções líquidas - Fonte: autor	85
Figura 28 - Plotagem da análise das opções ilíquidas - Fonte: autor	85

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Impacto de Variáveis no prêmio de opções - Fonte: Autor.....	28
Tabela 2 - Mercado de PETRD38 - Fonte: autor com base em dados da Bovespa.....	68
Tabela 3 - Legenda padrão para o mercado de uma opção – Fonte: autor.....	68
Tabela 4 - Modelagem Black-Scholes - PETRD38 - Fonte: Autor.....	70
Tabela 5 - Ações com opções líquidas na Bovespa – Programa de Formador de Mercado. Fonte: BM&FBovespa	71
Tabela 6 - Opções Líquidas encontradas na Bovespa - Fonte: autor com base em dados da Bovespa, 2015.....	72
Tabela 7 - Tela de PETRD38 – Fonte: autor com base em dados da BOVESPA, 2015	73
Tabela 8 - Legenda padrão do mercado de volatilidade de uma opção - Fonte: autor.....	73
Tabela 9 - Ações e Índices selecionados que possuem opções líquidas na bolsa americana (NYSE) ..	74
Tabela 10 - Ações com negociações em opções ilíquidas utilizadas na análise.....	75
Tabela 11 - Mercado de opções de SPY com vencimento abr/15 - Fonte: NYSE	77
Tabela 12 - Volatilidade Realizada de 8 dias - PETR4 - Fonte: Autor	78
Tabela 13 - Análise da Tela de uma opção líquida - Fonte: Autor com base em dados da Bovespa....	78
Tabela 14 - Legenda para a análise de aderência de uma opção líquida - Fonte: Autor	79
Tabela 15 - Teste de hipótese – Totalidade da Base- Fonte: autor.....	84
Tabela 16 - Resultado da análise de aderência do modelo Black-Scholes - ExPetr. Fonte: autor	86
Tabela 17 - Teste de hipótese - ExPetr - Fonte: autor	86

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	13
1.1	AMBIENTE DE TRABALHO – MESA DE VOLATILIDADE	13
1.2	MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS.....	14
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO	16
2.	MERCADO DE VOLATILIDADE – OPÇÕES.....	19
2.1	OPÇÕES – COMPRA E VENDA	19
2.1.1	OPÇÃO DE COMPRA (<i>CALL</i>).....	20
2.1.2	OPÇÃO DE VENDA (<i>PUT</i>).....	22
2.1.3	COMBINAÇÃO DE OPÇÕES	24
2.2	FATORES QUE INFLUENCIAM A PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES	28
2.3	VOLATILIDADE IMPLÍCITA E REALIZADA.....	32
2.3.1	VOLATILIDADE REALIZADA	32
2.3.2	VOLATILIDADE IMPLÍCITA	33
2.4	AS GREGAS.....	35
2.4.1	DELTA (δ)	35
2.4.2	GAMMA (γ)	38
2.4.3	VEGA (V).....	42
2.4.4	THETA (\emptyset)	43
2.4.5	RHO (ρ).....	45
2.5	COMPRANDO E VENDENDO VOLATILIDADE	46
2.5.1	COMPRADO EM VOLATILIDADE (<i>LONG VOLATILIDADE</i>).....	46
2.5.2	REALIZANDO LUCROS – COMPRADO EM VOLATILIDADE	49
2.5.3	REALIZANDO PREJUÍZOS– COMPRADO EM VOLATILIDADE	50
2.5.3	VENDIDO EM VOLATILIDADE (<i>SHORT VOLATILIDADE</i>)	51
2.5.4	RISCOS DA POSIÇÃO VENDIDA EM VOLATILIDADE	53
3.	MODELO DE PRECIFICAÇÃO – BLACK-SCHOLES	55
3.1	MODELO BINOMIAL.....	55
3.1.1	ÁRVORE BINOMIAL	55
3.1.2	GENERALIZAÇÃO DO MODELO BINOMIAL	58
3.2	PROCESSO DE WIENER.....	59
3.2.1	GENERALIZAÇÃO DO PROCESSO DE WIENER	59
3.2.2	PROCESSO DE WIENER PARA PREÇOS DE AÇÕES.....	61
3.3	LEMA DE ITÔ	62

3.4	MODELO LOG-NORMAL	62
3.5	MODELO DE BLACK-SCHOLES	63
4.	APRESENTAÇÃO DA ANÁLISE.....	67
4.1	OS OBJETIVOS E PREMISSAS DA ANÁLISE.....	67
4.2	OBSERVAÇÃO DE OPERAÇÕES DE OPCÕES NO MERCADO	67
4.3	VOLATILIDADE IMPLÍCITA EM UMA OPÇÃO	68
4.4	MERCADOS LÍQUIDOS	71
4.5	MERCADOS ILÍQUIDOS.....	74
4.6	DELTA DAS OPÇÕES ANALISADAS	76
4.7	VOLATILIDADE - MODELO BLACK-SCHOLES	77
4.8	TÚNEL DE REJEIÇÃO – ADERÊNCIA DO MODELO	79
5.	ANÁLISE DE ADERÊNCIA DO MODELO DE BLACK-SCHOLES EM OPCÕES NEGOCIADAS NO MERCADO	83
5.1	RESULTADOS GERAIS.....	83
5.2	RESULTADOS COM EXCLUSÃO DA PETROBRÁS	86
6.	CONCLUSÃO.....	87
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	91
	ANEXO	93
	APÊNDICE A - MERCADO DE OPCÕES DE EEM (RETIRADO EM 08/04/2015 – FONTE: AUTOR COM BASE EM DADOS DA NEW YORK STOCK EXCHANGE)	93
	APÊNDICE B - MERCADO DE OPCÕES DE CSNA3 (RETIRADO EM 08/04/2015 – FONTE: AUTOR COM BASE EM DADOS BM&FBOVESPA)	98
	APÊNDICE C – ANÁLISE DE ADERÊNCIA DO MODELO BLACK-SCHOLES – GRUPO LÍQUIDO.....	99
	APÊNDICE D – ANÁLISE DE ADERÊNCIA DO MODELO BLACK-SCHOLES – GRUPO ILÍQUIDO	103
	APÊNDICE E – ANÁLISE DE ADERÊNCIA DO MODELO BLACK-SCHOLES – GRUPO DE CONTROLE (EUA	104

1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento deste trabalho se dá no contexto da mesa de operações proprietárias de volatilidade de tesouraria de um conglomerado financeiro brasileiro onde o aluno participa de programa de Trainee. A função da mesa de volatilidade é de absorver os riscos provenientes de operações de clientes da instituição, diluí-los e controlá-los. A grande dificuldade do gerenciamento de risco de opções está em sua liquidez, devendo os operadores, portanto, considerarem esse risco no seu cotidiano.

Este Trabalho de Formatura visa identificar se o modelo de precificação e riscos de opções de Black-Scholes apresenta algum nível de diferenciação de aderência em sua utilização para mercados líquidos e ilíquidos. O tema é relevante para a conclusão do programa de trainee do aluno, pois possui aplicação prática no cotidiano de precificação de opções da mesa.

No capítulo introdutório serão apresentados a Mesa de Volatilidade e seu ambiente de trabalho, a dificuldade encontrada pelo aluno que motiva a realização do trabalho e seus objetivos.

1.1 AMBIENTE DE TRABALHO – MESA DE VOLATILIDADE

A Mesa de Volatilidade é parte da Tesouraria do conglomerado que é formado pela fusão de diversas entidades. A primeira, é voltada ao setor de varejo e múltiplo oferecendo serviços financeiros a clientes no Brasil, e em pelo menos outros 26 países. Em 2003 foi adquirida outra entidade, sem possuir agência, focada no mercado de atacado, com clientes cativos e marcas fortes e, o novo banco adquirido, opera com certa independência do conglomerado.

No ambiente da tesouraria há diversas áreas que atendem a todas as instituições do grupo, entre elas, Gestão de Caixa, Tesourarias Internacionais, Macroeconomia, *Banking* (gestão das carteiras de crédito a clientes da instituição), Institucional (gestão dos ativos institucionais) e *Trading*.

A *Trading* consiste em seis mesas de operações, Renda Variável, Crédito, Câmbio, Renda Fixa, Renda Fixa Internacional e Volatilidade. Cada uma delas atua em seu próprio mercado, tanto no Brasil como no resto do mundo, objetivando ganhos proprietários,

marketmaking (promoção de liquidez nos mercados) e absorção de riscos e operacionalização das operações de clientes da instituição.

O aluno trabalha na Mesa de Volatilidade, responsável pelo gerenciamento de operações e riscos relativos às opções negociadas tanto no mercado, como contra os clientes do banco de atacado e varejo. Nessa Mesa trabalham nove profissionais: um *gerente*, seis operadores, sendo cada um deles focado na volatilidade de um mercado, como Dólar, outras moedas (exceto Dólar), Bovespa (índice IBOV), *Commodities*, Juros e IPCA (Índice de Preços ao Consumidor amplo – principal indexador da inflação no Brasil) e *Single Names* (ações), um trainee e um estagiário. O principal parâmetro de risco gerenciado, a volatilidade, será explicada no capítulo 2 deste trabalho.

O autor, como Trainee da Mesa de Volatilidade, tem a responsabilidade de especificar as opções de dólar, tanto *vanilla* (opções simples de compra e venda) como exóticas (opções com barreira), de euro e de ações para os segmentos de clientes do banco. Além disso, ele faz a zeragem do risco direcional das operações fechadas, redige o comentário diário do mercado de commodities e gerencia o risco de delta e de volatilidade do livro de *ações*.

1.2 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS

O trabalho apresentado está imerso no cenário da Mesa de Volatilidade. No contato com operações de opções, o produto principal da mesa, que será melhor detalhado no capítulo 2, foi encontrada dificuldade em relação à especificação de opções ilíquidas.

Para a estratégia de volatilidade, utiliza-se uma técnica de proteção onde o risco direcional (delta) da carteira permanece neutro, chamada de “*delta hedge*”, que chamaremos nesse trabalho de “proteção direcional”, para eliminar o risco de variação do ativo implícito onde é necessário comprar ou vender o esse ativo sempre que houver uma variação de preço, para “reajustar” a proteção. Dado que seja necessário especificar uma opção sobre um ativo ilíquido, há a necessidade de rever o modelo de especificação, porque a proteção direcional não poderá ser feita com grande frequência e volume, dificultando a neutralização da carteira e tornando impossível eliminar o risco direcional.

Outra dificuldade é a própria opção. Quando é feita a especificação em um mercado líquido, supõe-se a possibilidade de que se consiga entrar e sair da posição caso seja necessário

ou vantajoso para o operador, pela venda das opções que foram compradas para outros participantes do mercado. Já em uma operação ilíquida, o operador subentende que será necessário administrar os riscos daquela opção até o vencimento ou exercício, já que a possibilidade de entrar e sair é mínima, devido à falta de interesse de outras pessoas naquele ativo. Essa dificuldade gera uma diferenciação da segunda opção em relação à primeira, que também deveria ser considerada junto às outras variáveis no momento de precificação do derivativo.

As opções são precificadas na mesa em questão de acordo com o modelo de Black-Scholes. Atualmente ele é o mais utilizado no mercado financeiro e sua saída (preço) é considerado o valor justo para o derivativo precificado. Há modelos mais simples e mais complicados do que ele. Entre os mais simples temos o modelo binomial que também será mais aprofundado no decorrer do trabalho e outros que consideram mais variáveis no input do modelo do que o modelo Black-Scholes (BLACK, SCHOLES, 1973). O modelo *Smile* (HAGAN, 2002), por exemplo, considera a variação da volatilidade no dinheiro (ATM - *At the Money*), adequando a curva de precificação às variações de preço do ativo implícito, o que torna mais complicada a chegada à um valor de saída do modelo, aumenta a possibilidade de erros e a quantidade de premissas utilizadas. É melhor para o operador seguir os mesmos parâmetros do resto do mercado, permitindo a comparação de resultados e a padronização de precificações, por isso o foco é no modelo de Black-Scholes, que considera a volatilidade realizada como dado de entrada e também que ela é estática para todos os pontos da curva, tanto os preços de exercício (*strikes*) mais altos como os mais baixos.

Os clientes do banco frequentemente demandam cotações para opções ilíquidas. Isso gera dificuldade nas operações, algumas vezes o operador é obrigado a recusar a cotação justificando-se pela falta de liquidez e, em outros casos, normalmente quando não é possível recusar para que o banco possa oferecer o melhor serviço possível ao cliente, o operador oferece preços que ele não se sente seguro quanto à sua capacidade de monetização da operação e muito menos dos riscos que serão tomados durante sua existência, o que pode prejudicar de maneira extensa seu desempenho.

Neste trabalho verificaremos se o modelo de Black-Scholes é adequado e aderente para a precificação desse tipo de derivativo, com ativo implícito ilíquido, ou se ele perde significativamente sua acurácia. Para isso será explicada a teoria e os parâmetros que servem de base para a precificação de opções e o mercado de volatilidade e buscaremos exemplos reais

de opções cotadas em mercados líquidos e ilíquidos, como opções sobre ações da Bovespa. Com isso, verificaremos se há divergências entre os mercados.

O modelo de Black-Scholes pode ser aplicado para todas as opções negociadas em bolsa?

A hipótese adotada neste trabalho é de que o modelo perde sua robustez ao ser utilizado para a precificação de opções em mercados ilíquidos.

O objetivo principal é verificar se qualquer tipo de opção pode receber o mesmo tratamento de modelagem e precificação. Se verificada alguma inconsistência na precificação das opções, buscaremos possibilidades de adaptação do modelo para que o mesmo possa ser utilizado em situações diversas.

Adotaremos em conjunto as metodologias comparativa e experimental, de modo a buscar situações práticas onde a negociação de opções diverge do modelo teórico, o que comprovaria a perda de aderência do modelo em questão ou uma possibilidade real de arbitragem no mercado.

A expectativa ao iniciar o trabalho é de que o modelo traga resultados plausíveis para as opções negociadas em mercados líquidos e piores a sua aderência nos mercados ilíquidos. Esperamos que o modelo traga resultados confiáveis para ambos os mercados.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Para orientação, nessa sessão será apresentada a estrutura do trabalho, auxiliando em sua leitura.

Capítulo 2 – Mercado de Volatilidade – Opções

Introdução aos conceitos de opções de compra (*call*) e de venda (*put*) e controle de risco, direcional (*delta*), *vega*, *gamma*, *theta* e *rho* (gregas), parâmetros para precificação de opções, como volatilidade realizada e implícita e conceitos básicos das operações de volatilidade, como estruturas de opções (figuras) e a proteção direcional (*delta hedging*) e ao mercado de volatilidade.

Capítulo 3 – Modelo de Precificação – Black-Scholes

Detalhamento do modelo de Black-Scholes e sua utilidade nas operações de volatilidade. Para isso será evidenciada a evolução do modelo, que surgiu a partir do modelo Binomial, do movimento Browniano geométrico (processo estocástico) e do Lema de Itô.

Capítulo 4 – Apresentação da Análise

Apresentação da metodologia e do processo utilizados para a verificação do modelo de Black-Scholes.

Serão especificados e demonstrados os grupos de controle dos fatores que podem induzir a falha do modelo, especialmente o risco de liquidez.

Capítulo 5 – Análise da aderência do modelo em opções negociadas no mercado

A partir de dados reais de opções disponíveis no mercado, serão analisados os preços de opções similares cotadas em diferentes mercados. Nessa sessão tomaremos como base o preço de opções sobre ações da Bovespa.

Capítulo 6 – Conclusão

Conclusão acerca da aderência do modelo nos mercados líquidos e ilíquidos, dificuldades encontradas e sugestões para próximos estudos.

2. MERCADO DE VOLATILIDADE – OPÇÕES

Nesse capítulo buscaremos compreender o mercado de volatilidade e, para isso, serão introduzidos ao leitor os tipos básicos de opções, fatores que influenciam em seu preço, conceito de volatilidade implícita e realizada e fatores de risco envolvidos no gerenciamento de um portfólio de opções, referidos no mercado financeiro como as “gregas”.

Opções são instrumentos financeiros que permitem ao titular (comprador) o direito de exercício, ou a compra ou venda de um determinado ativo subjacente (*underlying*) a um preço pré-determinado sujeito ao pagamento de um prêmio para o lançador (vendedor), que tem a obrigação de honrar o preço prometido, exatamente como um seguro.

O ativo subjacente será determinado no momento da compra dessa opção e pode ser qualquer ativo negociado no mercado financeiro, podendo ser um contrato futuro, um índice, uma *commodity*, uma ação, entre outros.

Por se tratar de um instrumento onde não é necessário o pagamento integral do principal, mas somente um pequeno prêmio para garantir o direito de exercício sobre esse ativo no futuro, as opções permitem a alavancagem no mercado financeiro, podendo aumentar significativamente a exposição de operadores a riscos, sem a necessidade de possuir ou desembolsar o principal negociado. Por isso, trata-se de um ativo de risco elevado, podendo levar a graves prejuízos para eles e, portanto, não é recomendada a sua negociação sem conhecimentos abrangentes dos riscos envolvidos.

2.1 OPÇÕES – COMPRA E VENDA

As opções negociadas no mercado financeiro podem ser de compra (*call*) do ativo subjacente ou de venda (*put*) do mesmo. O operador pode tanto comprá-las, desembolsando um prêmio para isso, ou vendê-las recebendo esse prêmio. Para operações de volatilidade veremos que as opções de compra e de venda se comportam da mesma maneira (Paridade *Put-Call*), mas entenderemos o conceito dos dois tipos de opção.

Características de uma opção (Hull,2007):

- Tipo: Compra (*Call*) ou Venda (*Put*)

- Ativo subjacente: é o ativo a qual a opção é derivada, será dele o preço que determina se a opção será ou não exercida.
- Preço de exercício (Strike): Preço ao qual a opção pode ser exercida, ela é dita fora do dinheiro (FD ou OTM - *out-of-the-money*) quando não tem valor, no dinheiro (ND ou ATM - *at-the-money*) quando está exatamente sobre o preço de exercício ou dentro do dinheiro (DD ou ITM - *in-the-money*), quando tem valor e deve ser exercida.
- Vencimento: todo derivativo tem uma data de vencimento, ele determina até quando a opção será válida, depois dessa data o contrato já não existirá mais. Caso seja uma opção europeia, ela somente poderá ser exercida nessa data, já as americanas podem ser exercidas em qualquer momento até o vencimento.
- Liquidation: física, quando o ativo subjacente é efetivamente trocado entre as contrapartes de uma opção, ou financeira, quando o ajuste é calculado, pago em moeda e o ativo subjacente não é repassado.

2.1.1 OPÇÃO DE COMPRA (CALL)

A opção de compra é valorada por um ativo subjacente, o qual, ao atingir determinado preço (preço de exercício), poderá ser adquirido pelo comprador da opção pelo preço de exercício definido.

A equação 2.1 representa o lucro para o comprador da opção de compra, sendo K o preço de exercício da opção, P o prêmio pago e X o preço do ativo subjacente:

$$\text{Lucro} = \max(X - K, 0) - P \quad (2.1)$$

O lucro é o valor que será recebido pelo comprador e consequentemente pago pelo lançador (vendedor) da opção no dia de seu vencimento (exercício).

O ponto de equilíbrio financeiro (*break-even*) da operação é representado pela equação (2.2):

$$\text{Ponto de Equilíbrio} = X = K + P \quad (2.2)$$

A partir desse ponto em diante o comprador da opção obtém lucro em sua operação, pois o ativo subjacente já subiu o suficiente para compensar o prêmio que foi pago pela opção.

O operador pode adquirir uma opção de compra de dólar-real (*Call de USDBRL*), com preço de exercício de R\$3,00/\$1, pagando um prêmio de R\$0,05 pela opção. Em seu vencimento o lucro é representado pela figura 1, onde o eixo horizontal é o preço do dólar e o vertical é o lucro obtido na operação, sendo que um lucro negativo é o equivalente a um prejuízo. Pode-se notar que a opção é exercida a partir de seu preço de exercício R\$3,00, ponto da curva onde o comprador da opção passa a receber dinheiro pela operação, sendo o ponto de equilíbrio financeiro da operação, R\$3,05 (preço de exercício somado ao prêmio pago). Caso o dólar esteja abaixo do preço de exercício, o operador perde a totalidade do prêmio pago. Observa-se ainda que o lucro aumenta linearmente com o preço do dólar a partir do preço do exercício.

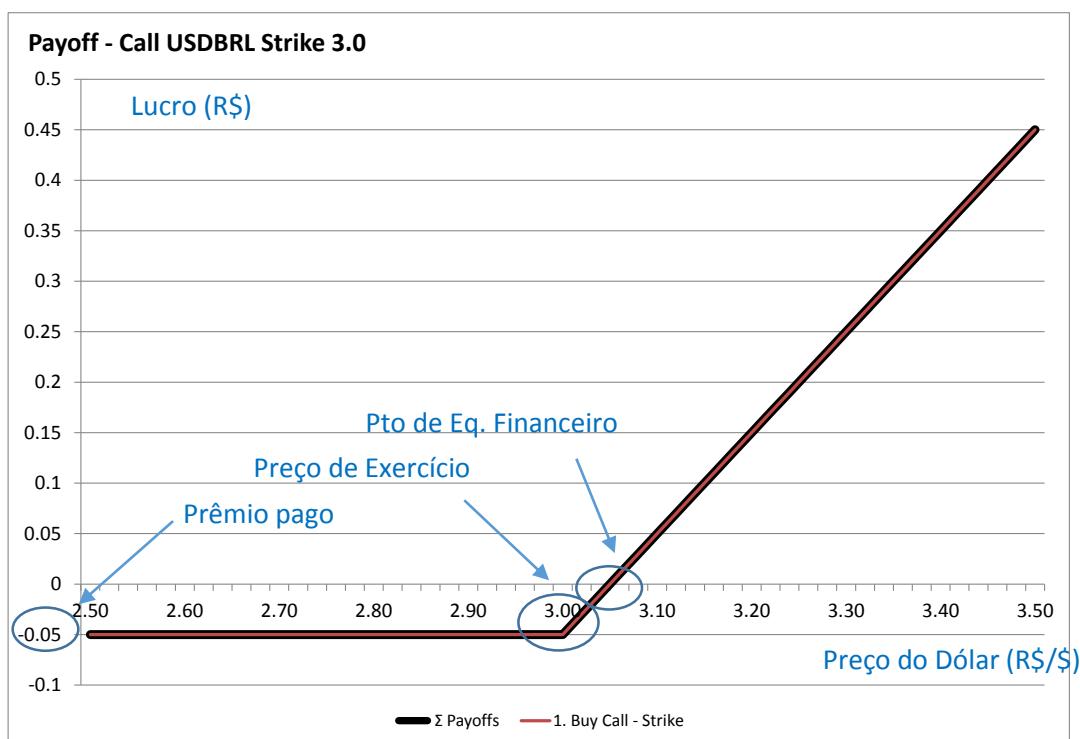


Figura 1- Lucro do Comprador de uma opção de compra - Fonte: autor

Analogamente, o lucro da operação para o lançador (vendedor) da opção de compra, será como demonstrado na figura 2 e na equação 2.3:

$$\text{Lucro} = P - \max(X - K, 0) \quad (2.3)$$

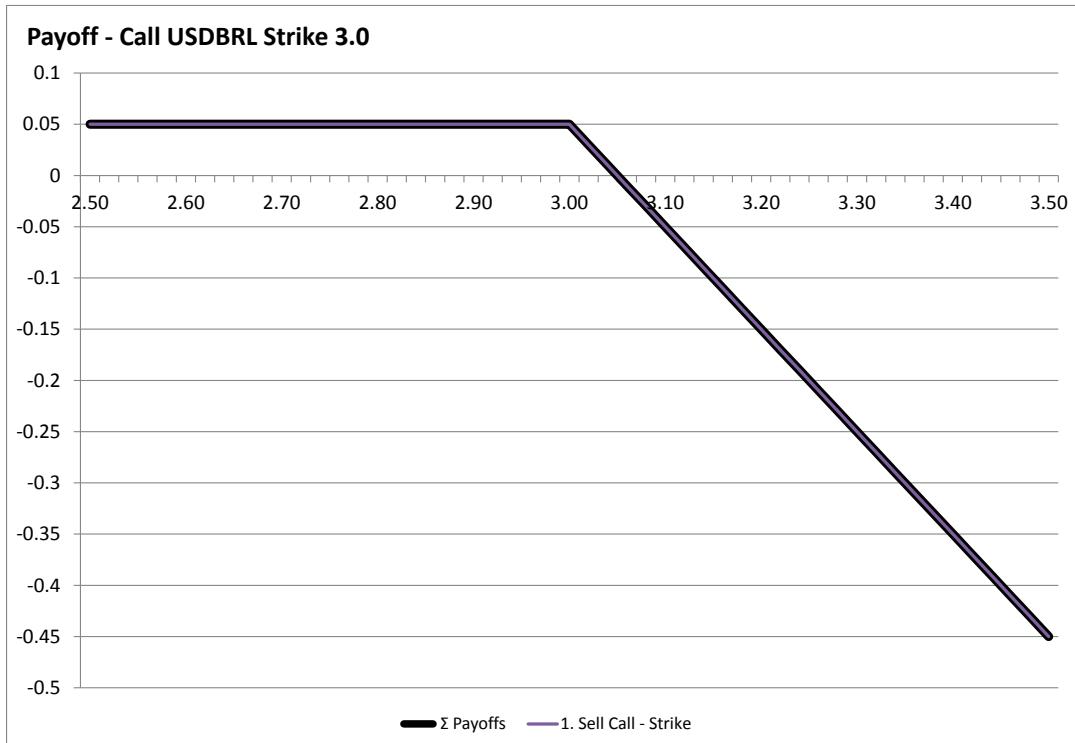


Figura 2 - Lucro do vendedor de uma opção de compra - Fonte: autor

2.1.2 OPÇÃO DE VENDA (PUT)

A opção de venda funciona da mesma maneira do que a de compra, mas ao invés de se possuir a opcionalidade de comprar o ativo pelo preço de exercício, tem-se a opção de vendê-lo ao preço pré-determinado. Portanto ela só é vantajosa e exercida quando o preço do ativo subjacente está abaixo do preço de exercício determinado e não acima, como na opção de compra. Pela mesma notação podemos verificar na figura 3 e na equação 2.3 o lucro do comprador da opção de venda no dia de seu vencimento:

$$\text{Lucro} = \max(K - X, 0) - P \quad (2.3)$$

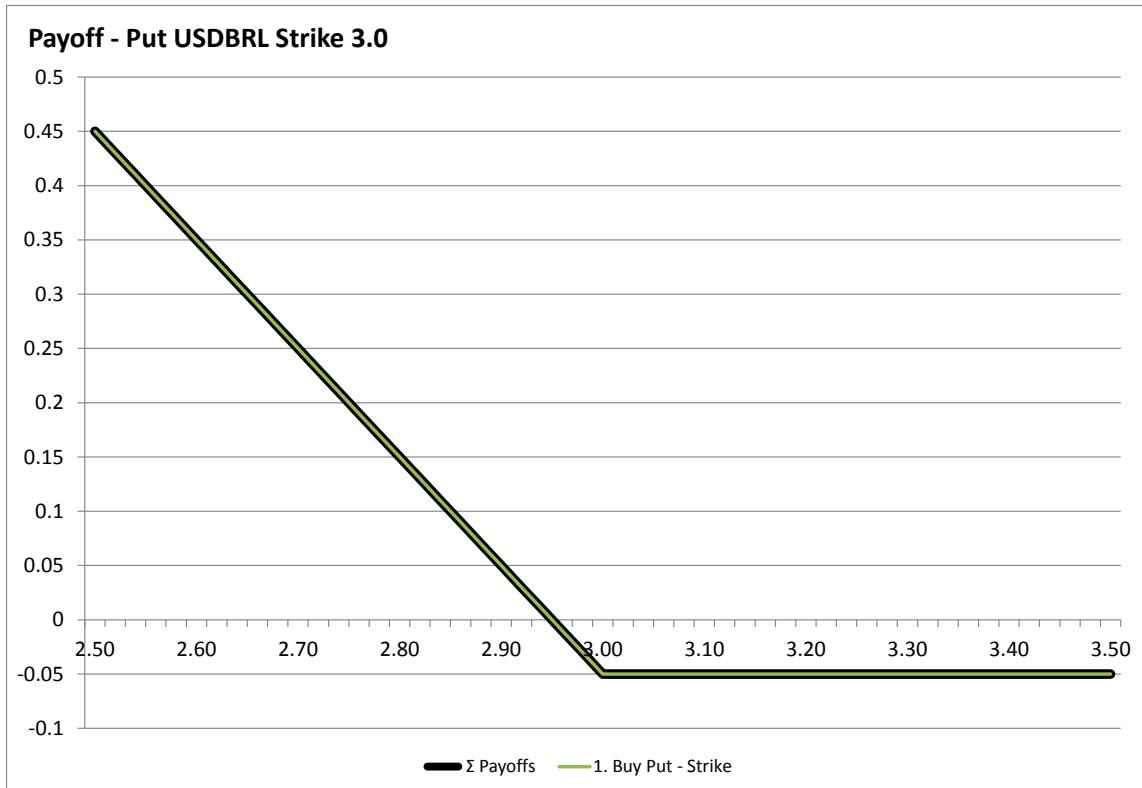


Figura 3 - Lucro do comprador de uma opção de venda - Fonte: autor

E, analogamente, o lucro do vendedor (lançador) da opção de venda, na figura 4 e na equação 2.4:

$$\text{Lucro} = P - \max(K - X, 0) \quad (2.4)$$

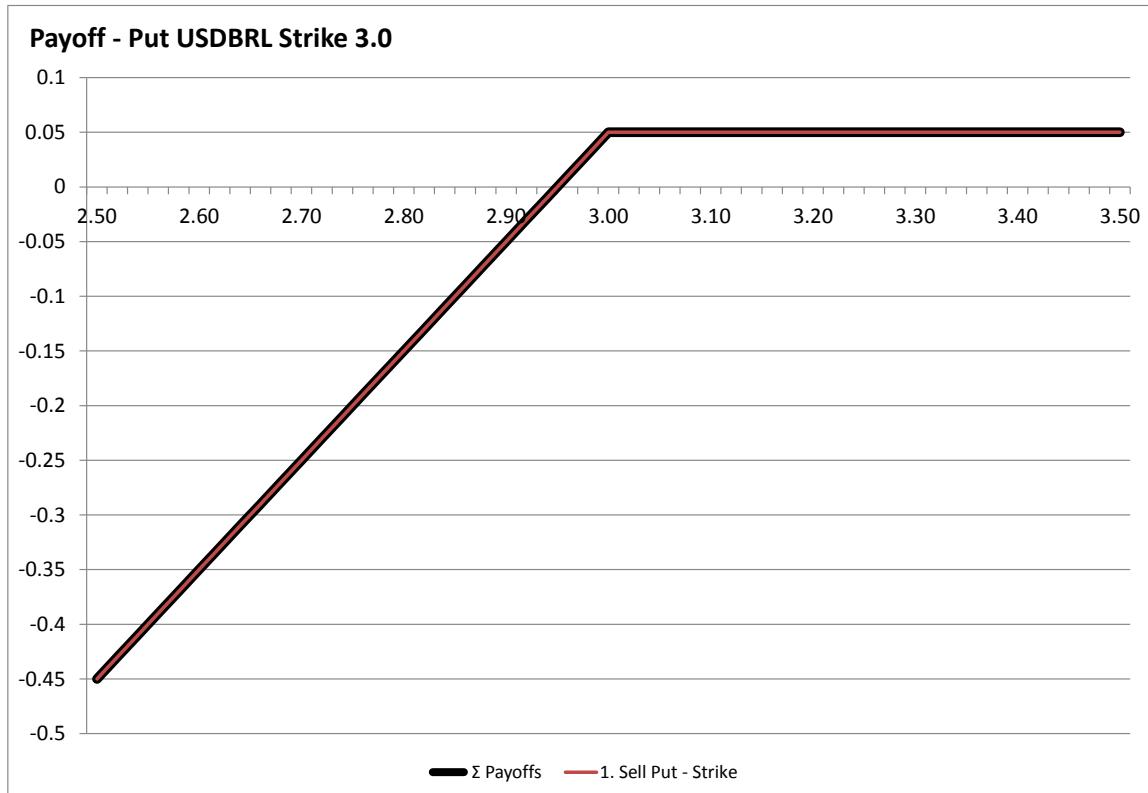


Figura 4 - Lucro do vendedor de uma opção de venda - Fonte: autor

Podemos perceber que o comprador da opção de compra se beneficia do aumento dos preços do ativo subjacente e o da opção de venda da queda desses preços. Além disso, a perda do comprador de uma opção é sempre limitada ao prêmio pago por ela, enquanto seu lucro máximo é infinito e o contrário ocorre com o vendedor da opção, podendo sofrer perdas significativas.

2.1.3 COMBINAÇÃO DE OPÇÕES

A partir dos dois tipos de opção básicos, o operador pode montar diversas estruturas para se adequar à sua necessidade (COHEN, 2005). Seguem alguns exemplos pra ilustração, onde adotaremos a premissa de que todas as opções têm a mesma data de vencimento, apesar de também ser possível montar estratégias onde o vencimento das opções é diferente. Notem que todas as estruturas também podem ser vendidas, espelhando a curva de lucro na expectativa de ganhar com o prêmio recebido caso a estrutura chegue ao vencimento fora do dinheiro e as opções não sejam exercidas.

2.1.3.1 TRAVA DE ALTA (CALL SPREAD)

A compra de uma opção de compra será barateada pela venda de outra opção de compra com preço de exercício acima da primeira. O operador abre mão de uma possibilidade de lucro infinito para baratear a compra da primeira opção. Pode ser usada quando se tem uma crença de que o preço do ativo subjacente irá subir, mas não indefinidamente, já que se abre mão do ganho com uma alta maior do que o preço de exercício da opção vendida.

Como podemos verificar no gráfico 5, que simula a compra de uma opção com exercício a R\$3,00/\$1 por R\$0,05 e a venda de uma com exercício a R\$3,20/\$1 por R\$0,02, quando o preço de exercício superior é atingido, a opção vendida entra dentro do dinheiro e limita o lucro do comprador da figura.

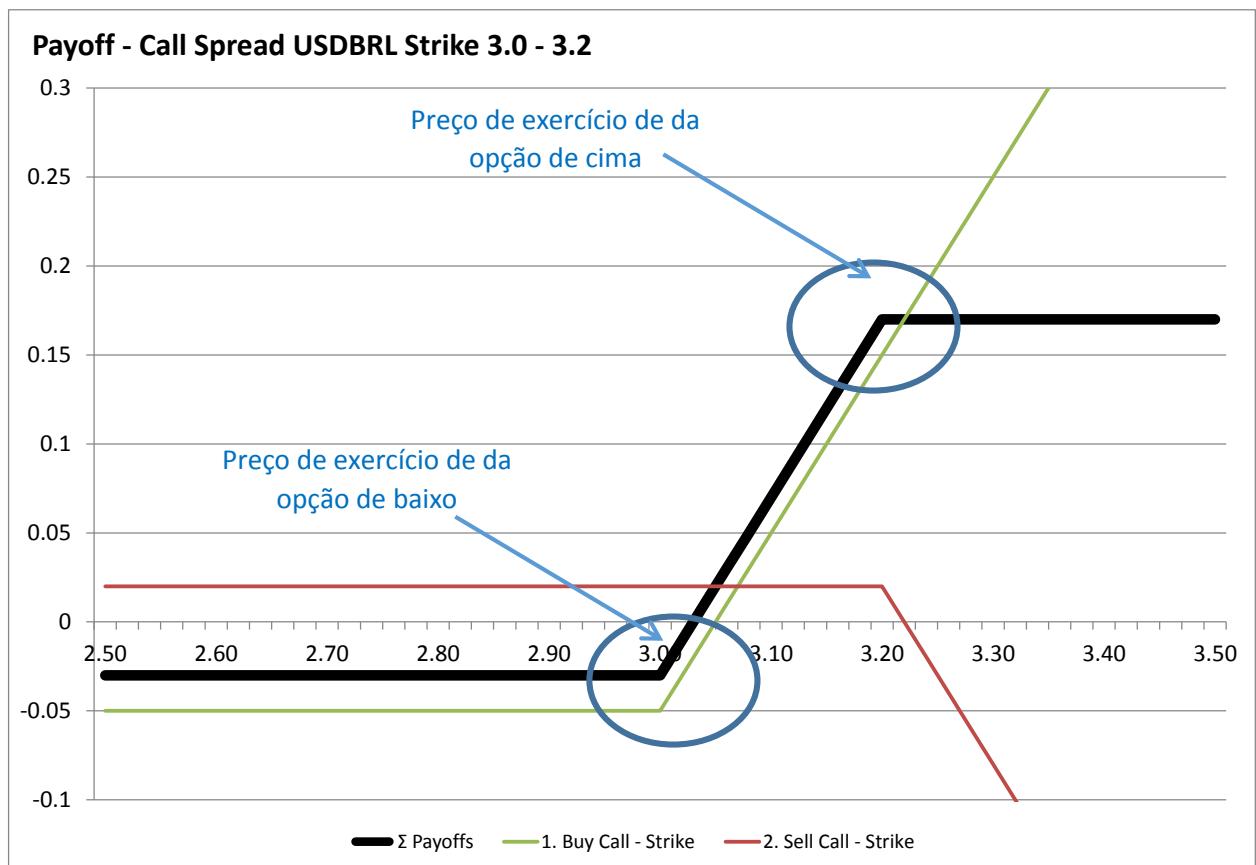


Figura 5 - Trava de alta - Fonte: autor

Notamos também na figura 5 que a perda da estratégia, caso o dólar não chegue a ultrapassar os R\$3,00 no vencimento das opções será de R\$0,03 ao invés de R\$0,05, e o lucro

máximo será de R\$0,17 enquanto na compra individual da opção de compra, não há limitador de lucro.

2.1.3.2 TRAVA DE BAIXA (PUT SPREAD)

Segue a mesma lógica da trava de alta, a compra de uma opção de venda será barateada pela venda de uma outra com preço de exercício abaixo da primeira. O operador abre mão de uma possibilidade de lucro infinito para baratear a compra da opção. Pode ser usada quando se tem uma crença de que o preço do ativo subjacente irá cair, mas não indefinidamente já que se abre mão do ganho para uma queda maior no ativo do que o preço de exercício da opção vendida.

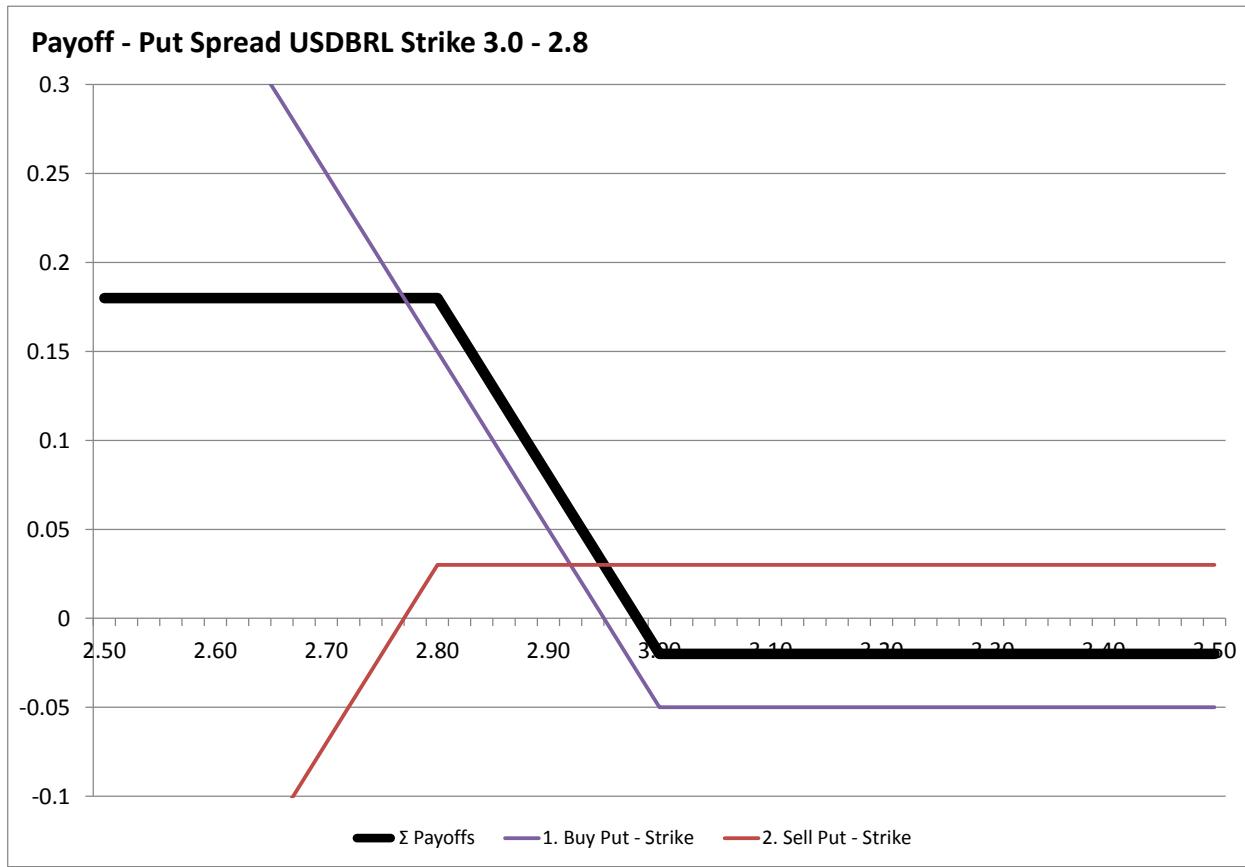


Figura 6 - Trava de baixa - Fonte: autor

Como pode ser verificado na figura 6, analogamente à trava de alta, a trava de baixa é a compra de uma opção de venda com exercício a R\$3,00/\$1 por R\$0,05 e a venda de uma com exercício a R\$2,80/\$1 por R\$0,02, quando o preço de exercício inferior é atingido, a opção

vendida entra dentro do dinheiro e limita o lucro do comprador da figura aos mesmos R\$0,17 da trava de alta.

2.1.3.3 FORCA (STRADDLE)

Forca é a compra de uma opção de compra e de uma opção de venda no mesmo preço de exercício. Pode ser usada quando se acredita que o preço do ativo subjacente sofrerá uma grande variação até o vencimento das opções, mas não se sabe se para cima ou para baixo. É muito utilizada em eventos binários, como a divulgação de um dado macroeconômico com forte influência no ativo subjacente, ou a divulgação do resultado de uma empresa, que pode levá-la a subir muito ou a cair muito. Perde-se o prêmio pago caso o ativo subjacente permaneça inalterado ou próximo ao preço de exercício, no vencimento, podemos visualizar a estratégia na figura 7.

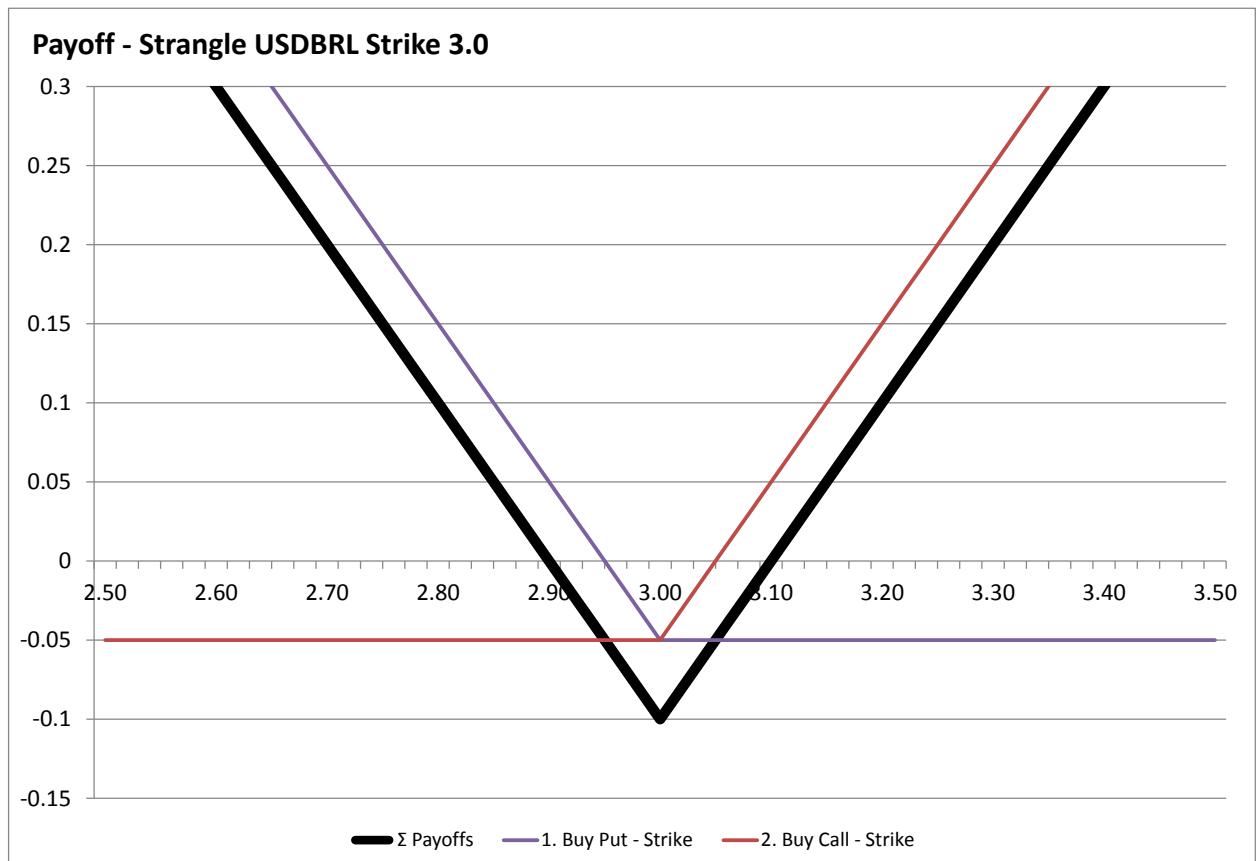


Figura 7 - Forca - Fonte: autor

Nessa estratégia, sempre uma das opções será exercida e nunca as duas. Apesar de parecer uma estratégia muito boa, ela é extremamente cara, já que devemos arcar tanto com o prêmio da opção de compra como da de venda, mesmo já sabendo que somente uma será exercida e a outra terminará sua vida valendo zero, tornando o ponto de equilíbrio mais difícil de ser alcançado.

2.2 FATORES QUE INFLUENCIAM A PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES

Os fatores que influenciam na precificação de opções são (HULL, 2007):

- Preço do ativo subjacente (*spot*), X
- Preço de exercício da opção (*strike*), K
- Prazo até o vencimento, T
- Volatilidade, σ
- Taxa de retorno livre de risco (juros), r

A variação de cada fator impacta de uma maneira diferente e individual no preço da opção, na tabela 1 temos uma exemplificação e, em seguida, uma explicação do que acontece com o prêmio de uma opção quando os fatores de risco variam individualmente.

Aumento dos Fatores:	<i>Spot</i>	<i>Strike</i>	Prazo	Volatilidade	Taxa de Juros
OPÇÃO DE COMPRA	+	-	+	+	+
OPÇÃO DE VENDA	-	+	+	+	-

Tabela 1 - Impacto de Variáveis no prêmio de opções - Fonte: Autor

O impacto inverso acontece, caso eles diminuam. Supõe-se sempre, somente a variação de um dos fatores simultaneamente, podendo entender melhor esses impactos.

Para ilustrar os impactos veremos a seguir gráficos representando as variações do lucro obtido com as opções sempre no eixo vertical e no horizontal a variação de preço do ativo subjacente. Em todos os gráficos estão representadas opções de venda e as simulações foram realizadas no mesmo instante.

Com o aumento do preço do ativo subjacente o prêmio de uma opção de venda diminui, já que o preço se afasta do exercício, sinalizando menor probabilidade de atingi-lo; o contrário ocorre com a opção de compra.

Com o aumento do preço de exercício de uma opção de venda, o prêmio dela aumenta, já que temos o preço de exercício mais próximo do preço do ativo subjacente, aumentando a probabilidade de atingi-lo; o contrário ocorre com a opção de compra.

Podemos verificar na figura 8 a ilustração do resultado de ambas as variações, de preço e de preço de exercício. Foram simuladas opções sobre o índice de bolsa sul-coreana (EWY). Esse índice tinha preço de \$55,01 no momento da simulação e as opções escolhidas foram as de preço de exercício \$50 (vermelha) e \$51 (azul). Com o aumento do preço do ativo no eixo horizontal as opções de venda perdem valor e, a opção representada pela curva azul, com preço de exercício mais alto, é mais cara do que a opção representada pela curva vermelha, que possui o preço de exercício mais baixo.

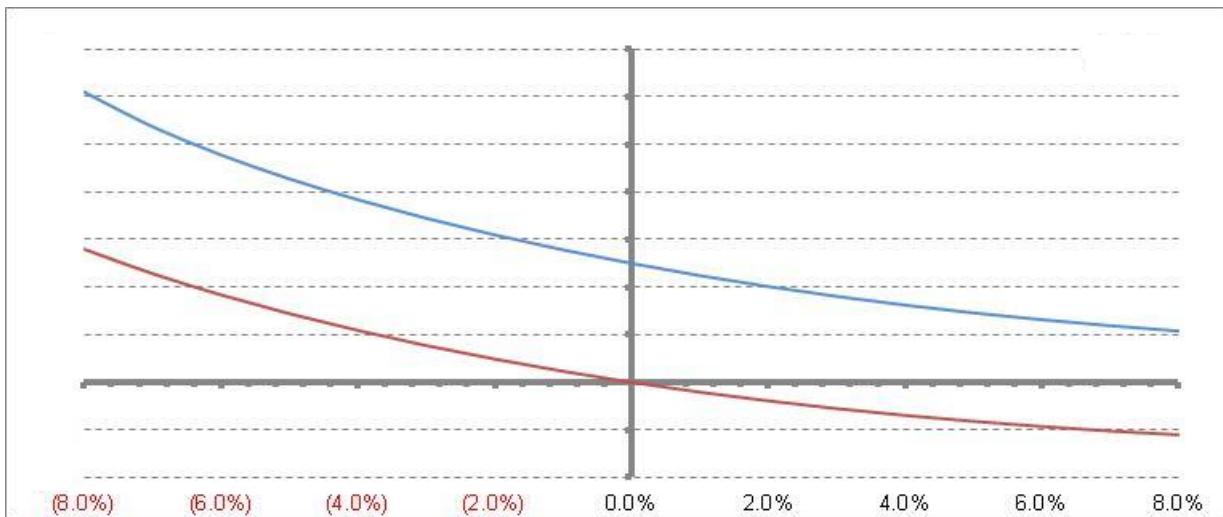


Figura 8 - Preço de opções de venda de diferentes preços de exercício - Fonte: autor

Com a diminuição do prazo de uma opção, tanto de compra quanto de venda, o prêmio da opção diminui, já que há menor tempo disponível e, portanto, probabilidade, de que o ativo subjacente atinja o preço escolhido.

Na figura 9 temos a mesma opção (vermelha) sobre o índice sul-coreano de preço de exercício \$50. Essa opção tem seu vencimento definido para 3 meses. Simulamos também uma opção de preço de exercício \$50, mas que vence em somente 1 mês (azul). Pode-se notar que a opção mais curta, vale menos.

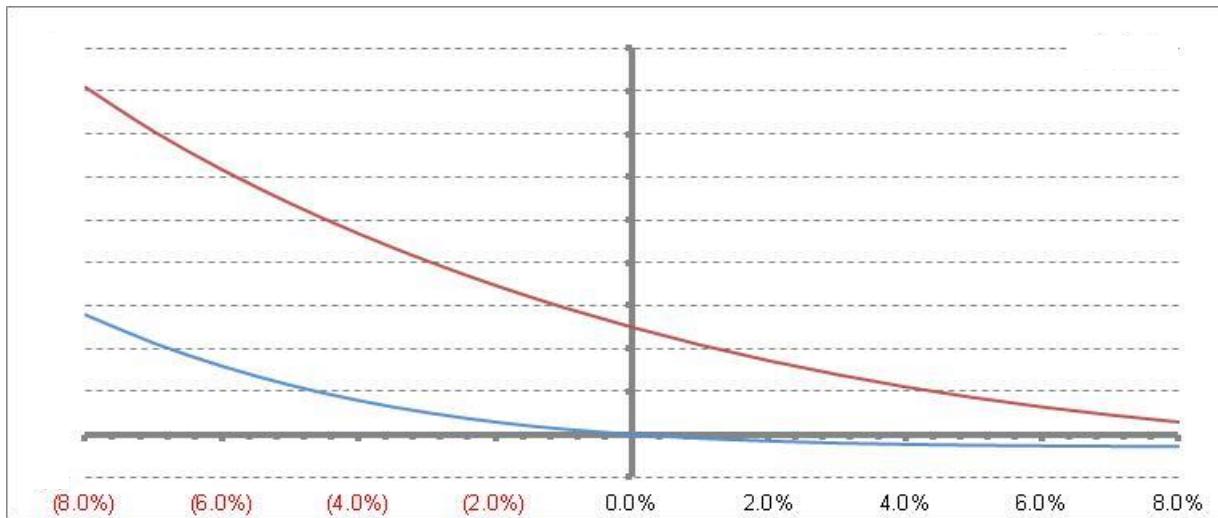


Figura 9 - Preço de opções de venda de diferentes prazos de exercício - Fonte: autor

Com a queda da volatilidade implícita do ativo subjacente, tanto a opção de compra quanto a de venda, tem seu prêmio reduzido, já que, com menor volatilidade, a probabilidade de o ativo subjacente atingir o preço de exercício diminui. Este é o principal parâmetro de precificação e será aprofundado no próximo capítulo.

Mantivemos na figura 10 a mesma opção de preço de exercício \$50 (vermelha), porém a simulamos com uma possível queda na volatilidade da bolsa sul-coreana (curva azul). Nota-se que além da queda no valor do prêmio, também temos uma diminuição da curvatura da opção.

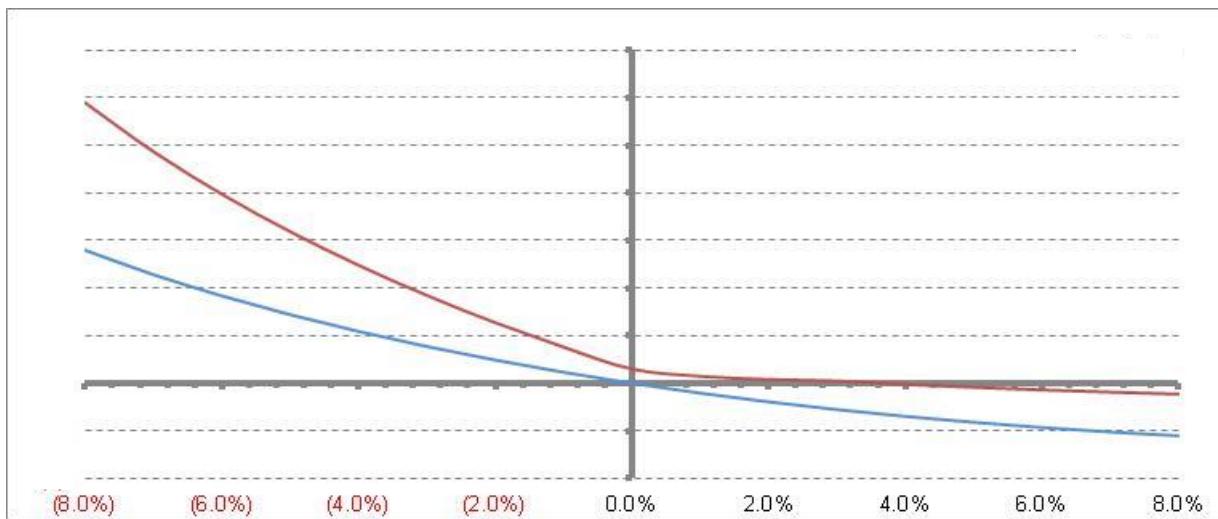


Figura 10 - Preços de opções de venda sujeitas a diferentes volatilidades - Fonte: autor

O aumento da taxa de juros livre de risco é o menos intuitivo de se compreender, porque ele impacta tanto no fluxo de caixa da operação, como no retorno esperado pelo investidor. Com o aumento da taxa de juros, o investidor eleva o seu retorno esperado na operação, já que a operação de risco tem que render mais do que um investimento sem risco no mesmo período para valer a pena.

Além disso, com juros mais altos, o valor presente de qualquer recebível futuro é menor. Desse modo, o investidor precisa que o aumento no preço do ativo subjacente seja maior do que antes para que o valor presente do investimento seja o mesmo do que o anterior. Por isso o aumento do preço do ativo futuro será maior, dado que este será carregado a uma taxa de juros mais alta.

Portanto um aumento de taxa de juros funciona como um aumento artificial no preço do ativo subjacente e, analogamente à situação onde temos aumento do preço do ativo subjacente, a opção de compra fica mais cara e a opção de venda mais barata.

Na figura 11 o eixo horizontal deixa de ser representativo de uma variação de preço no ativo subjacente e se torna a variação da taxa de juros a qual a opção está sujeita. Pode-se notar que o efeito no preço é análogo às simulações quando ocorre variação do preço do ativo subjacente.

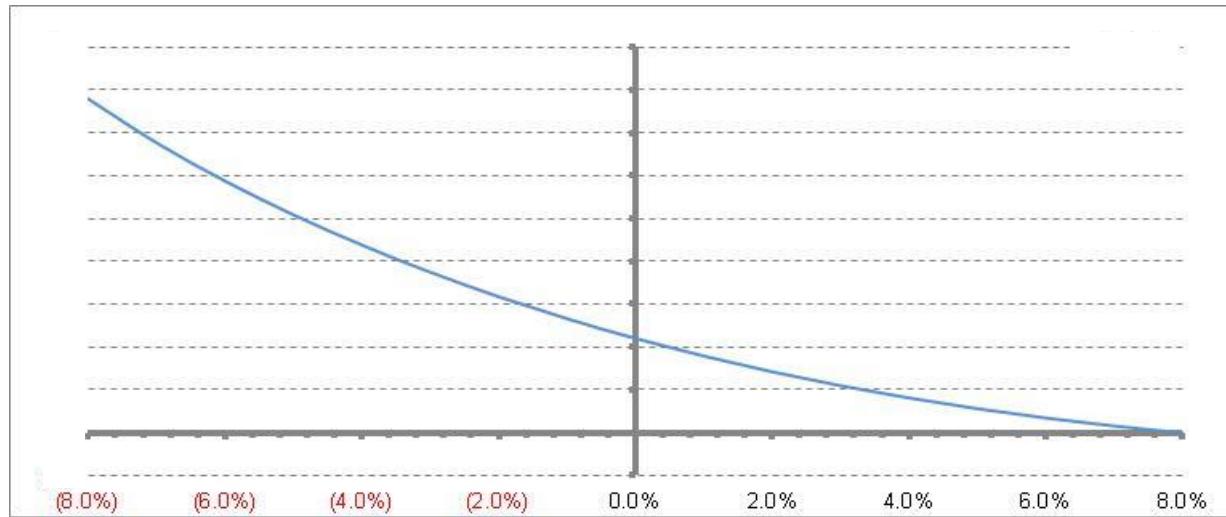


Figura 11 - Opção sujeita à variação da taxa de juros - Fonte: autor

2.3 VOLATILIDADE IMPLÍCITA E REALIZADA

Quando falamos em volatilidade temos dois tipos principais, a implícita e a realizada.

2.3.1 VOLATILIDADE REALIZADA

A volatilidade realizada é a volatilidade calculada pelo passado do ativo estudado em um determinado tempo considerado. Utiliza-se o cálculo lognormal das distribuições dos preços para se calcular o retorno percentual ao período do ativo, mostrado na equação 2.5. Sendo X o retorno diário do ativo:

$$\text{Retorno Percentual no Período} = R_i = \ln\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right) \quad (2.5)$$

Normalmente é utilizado o preço de fechamento do ativo (X_t) no cálculo (modelo clássico), apesar de que muitos operadores podem optar pelo preço do horário mais líquido daquele ativo ou por modelos mais complexos que consideram também, além do preço de fechamento, o preço de abertura, máximo e mínimo diários. A diferença obtida entre os modelos é pequena, por isso o modelo clássico é mais amplamente utilizado, especialmente por quem não tem sistemas mais avançadas de modelagem e especificação à mão. Portanto consideraremos sempre a “Vol realizada” calculada pelo modelo clássico (equação 2.6), que é o desvio-padrão (σ) anualizado dos retornos diários (R_t) do ativo.

$$\text{Volatilidade realizada no período} = \sigma_R = \sqrt{252} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n R_t^2} \quad (2.6)$$

O padrão do mercado é observar a volatilidade realizada em percentual anualizado. Por isso o fator $\sqrt{252}$ é incluído no cálculo (252 é o número de dias úteis considerados em um ano). Dizer que o ativo realizou 16% de volatilidade no período, é análogo a dizer que o desvio-padrão do ativo é de 16% ao ano, ou aproximadamente 1% ao dia.

$$\sqrt{252} (\%) = 15.875\% \sim 16\%$$

Um bom exemplo para se estudar a volatilidade realizada é a ação da Petrobras, maior empresa brasileira que foi fortemente impactada pelas eleições de outubro de 2014 e pelas investigações da operação Lava-Jato desde dezembro de 2014. Pode ser visto na figura 12 uma

grande variação da volatilidade realizada média dos últimos dez dias (linha branca) durante esses dois períodos e como a volatilidade realizada longa, período dos últimos 252 dias (linha roxa), demora a ser influenciada pela recente mudança no patamar de volatilidade do ativo.



Figura 12 - Volatilidade realizada de PETR4 - Fonte: Bloomberg

Lembrando que essa ação sofreu forte queda nesse período, como podemos ver na figura 13, levando-a a um patamar de preço mais baixo onde uma variação de preço absoluta se torna maior em porcentagem, aumentando sua volatilidade pelo modelo porcentual que utilizamos.



Figura 13 - Preço da ação de PETR4 - Fonte: Bloomberg

2.3.2 VOLATILIDADE IMPLÍCITA

Uma das grandes dificuldades da modelagem de opções é a volatilidade que deve ser utilizada pelo operador para especificar ou marcar a opção. Poderia ser utilizada a realizada de 10, 50, 100 dias ou a do número de dias úteis considerado na especificação da opção, entre outras possibilidades. O modelo Black-Scholes utiliza sempre a volatilidade realizada do período.

Não há uma resposta certa, dado que a volatilidade passada, ou realizada, não é garantia de volatilidade futura. Operadores com uma memória longa preferirão as mais longas enquanto os outros, esquecendo os movimentos passados, utilizam as volatilidades mais curtas. Esse desacordo é o que forma os mercados (TALEB, 1997).

A volatilidade implícita é a volatilidade que sai do modelo quando a entrada é o preço que se deseja pagar ou receber pela opção. Consequentemente, quando há um acordo de preço entre dois operadores e a compra da opção ocorre, esse será o preço e a volatilidade que o mercado considera “justa” para a opção em questão naquele momento. Ela pode ser comparada com a volatilidade que o mercado acredita que será realizada naquele período futuro pelo ativo considerado.

Essa volatilidade considera eventos futuros, como a divulgação de resultados de uma empresa, alteração de fatores macroeconômicos, decisões do Banco Central sobre aumento ou não da taxa básica de juros, além de diversos outros fatores, inclusive oferta e demanda pela opção em questão.

Ela é subjetiva, pois cada operador pode considerar maior ou menor peso para cada um desses eventos e também diferentes cenários em cada um deles. Um operador que acredita que a empresa divulgará resultados acima do esperado pode estar propenso a pagar mais volatilidade por uma opção com preço de exercício acima do preço atual da ação do que para uma opção com exercício abaixo do preço atual, dada a sua crença de que no futuro, a opção mais baixa valerá menos do que a mais alta devido à valorização do ativo.

Também é o que se compra e vende, quando o operador negocia volatilidade. Veremos mais como isso funciona nos próximos capítulos.



Figura 14 - Volatilidade Implícita da ação de PETR4 - Fonte: Bloomberg

A volatilidade implícita, mostrada na figura 14, é extraída dos preços de opções negociadas no mercado e é medida da mesma maneira que a realizada, em percentual anualizado. Portanto, dizer que a volatilidade implícita de um ativo é de 15.9%, é análogo a dizer que o mercado especifica uma variação diária (ou desvio-padrão) de 1% para ele no futuro, ou 15.9% ao ano.

2.4 AS GREGAS

Ao adquirir opções o operador fica exposto a outros riscos, não somente à alta e baixa do preço do ativo subjacente, principalmente pela não-linearidade das opções. Os riscos inerentes a um portfólio de opções abrangem outras dimensões, não somente a variação direcional da ação, dado à concavidade ou convexidade do perfil desse portfólio e a exposição aos fatores, volatilidade e juros futuros (TALEB, 1997).

2.4.1 DELTA (δ)

O *Delta* é a primeira dimensão do risco, ou o primeiro momento do portfólio. Matematicamente é a primeira derivada do preço do ativo subjacente. Ele é a sensibilidade do derivativo (opção) em relação à variação de preço do ativo subjacente (equação 2.7) e pode ser expressada em números absolutos (δ) ou percentuais ($\delta\%$), variando de zero a 1. O preço

da opção irá variar de acordo com o preço do ativo subjacente e o seu delta, como mostrado na equação 2.8.

$$\text{Delta} = \delta\% = \frac{\Delta P_x}{\Delta X} \quad (2.7)$$

$$\text{Variação do Preço da Opção} = \Delta P_x = \Delta X * \delta(\%) \quad (2.8)$$

Para compreendermos o Delta, utilizaremos exemplos extremos e mínimos de variações do ativo subjacente. Suponhamos que o operador adquira uma opção de compra exatamente no dinheiro (50% delta), com preço de exercício 100 e vencimento daqui a três meses de uma ação que se encontra, nesse momento, valendo exatamente 100 reais. Ignoraremos o prêmio pago, custos de transação e qualquer influência de juros, inflação ou volatilidade. A figura 15 mostra uma simulação contínua para o delta dessa opção com uma queda ou uma alta de 100% no preço do ativo subjacente. O delta da opção é mostrado no eixo das ordenadas e a variação de preço do ativo nas abscissas.

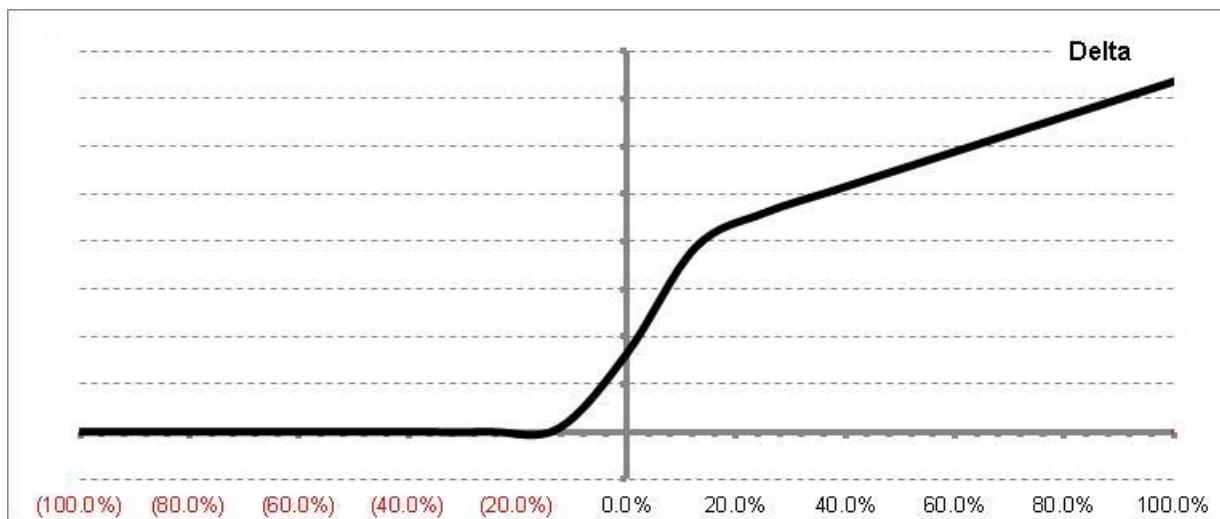


Figura 15 - Simulação de delta de uma opção 50% delta - Fonte: autor

Em um primeiro cenário, caso durante esses três meses essa empresa for à falência e sua ação estiver valendo próximo de zero, essa opção de compra com exercício a 100 reais também valerá zero, pois estaria muito fora do dinheiro e a sua probabilidade de exercício seria zero, de maneira que seu delta e seu delta percentual seriam respectivamente zero e 0%. Nessa situação, uma variação no preço da ação de, por exemplo, uma alta de 50 centavos, implicaria em uma variação zero no preço do derivativo, como pode ser visto no lado esquerdo do gráfico 12. Utilizando a equação 2.8, temos:

$$\text{Variação do Preço da Opção} = \Delta P_1 = 0.50 * 0(\%) = 0.00$$

No segundo cenário, caso durante esses três meses essa empresa receba benefícios fiscais que não estavam previstos e apresente excelentes resultados, como consequência sua ação passa a valer 250 reais e essa opção de compra com exercício a 100 reais valeria seu valor implícito de 150 reais, de acordo com a equação 2.1, porque estaria muito dentro do dinheiro (*deep-in-the-money*) e a sua probabilidade de exercício seria 1 ou 100%, de maneira que seu delta e delta percentual seriam respectivamente 150 e 100%. Nessa situação, uma variação no preço da ação, por exemplo, a mesma alta de 50 centavos, implicaria em uma variação idêntica no preço do derivativo, que nesses níveis de preço se comporta de maneira linear, exatamente como se fosse uma ação.

Pode-se perceber pelo gráfico que, com essa alta expressiva a opção passa a se comportar como se fosse uma ação do ativo subjacente, valendo exatamente o preço da ação menos o valor de seu preço de exercício. Novamente de acordo com a equação 2.8 temos:

$$\text{Variação do Preço da Opção} = \Delta P_2 = 0.50 * 100(\%) = 0.50$$

O terceiro cenário é aquele em que, durante esses três meses, a empresa apresenta resultados dentro do esperado e a ação continua valendo 100 reais. Essa opção com exercício a 100 valeria somente seu valor temporal (Theta – que será discutido na seção 2.4.4), pois estaria exatamente no dinheiro, e a sua probabilidade de exercício seria 0.50 ou 50%, de maneira que seu delta e delta percentual seriam respectivamente 0.50 e 50%. Nessa situação, uma alta de 50 centavos implicaria em metade da variação no preço do derivativo. Essa alta no preço da opção é devida ao aumento de sua probabilidade de exercício e é também seguida de um aumento no seu delta, incorporando essa probabilidade. De acordo com a equação 2.8:

$$\text{Variação do Preço da Opção} = \Delta P_3 = 0.50 * 50(\%) = 0.25$$

Portanto, uma opção no dinheiro tem delta 50% e, qualquer variação do ativo, para cima ou para baixo, implica na mudança da probabilidade de exercício dessa opção, o que será incorporado pelo delta. Se a variação de preço levar a opção para dentro do dinheiro (DD ou *ITM*) o novo delta será maior do que 50% e caso essa mudança leve a opção para fora do dinheiro (FD ou *OTM*), o novo delta obrigatoriamente será menor do que 50%. Nos casos extremos, o delta fora do dinheiro é 0% e o dentro do dinheiro é 100%.

2.4.2 GAMMA (γ)

O gamma é a segunda derivada do preço da opção, ou a derivada do delta. Ele mede a sensibilidade do Delta em relação ao preço do ativo, ou a velocidade com que o delta de um derivativo varia de acordo com a variação do preço do ativo subjacente. Ele é medido sempre em números absolutos e na mesma moeda em que o Delta está sendo medido, de maneira que ele representa a variação absoluta do Delta da carteira quando o ativo subjacente sofre uma variação de $\pm 1\%$ de acordo com a equação 2.9, que utiliza o mesmo padrão de variáveis apresentado anteriormente. Sendo P_x o preço da opção e X o preço do ativo subjacente:

$$\text{Gamma} = \gamma = \frac{\partial^2 P_x}{\partial^2 X} \quad (2.9)$$

Devido às suas características não lineares exemplificadas na sessão anterior, uma opção não acompanha perfeitamente o preço do ativo subjacente. Para o operador de opções é essencial acompanhar “o quanto” seu portfólio acompanha essas variações, tanto para se proteger quanto para aproveitá-las a seu favor.

O Gamma tem como característica sua desigualdade no tempo e espaço, sendo ele a inclinação (derivada) do delta naquele instante. Por ser a variação do delta, podemos entendê-lo como a variação da probabilidade de exercício da opção. São características do gamma:

- O Gamma é máximo para uma opção no dinheiro e próxima do vencimento (uma opção com preço de exercício próximo do preço atual do ativo subjacente e do vencimento gera dúvida sobre o seu exercício, porque fica dividida entre a possibilidade de vencimento dentro ou fora do dinheiro), levando a opção a grandes variações de delta, que no limite, ou no dia o vencimento, varia entre delta 0% e 100% ao ir de fora para dentro do dinheiro.
- O Gamma é máximo para uma opção fora do dinheiro ou dentro do dinheiro e longe do vencimento (uma opção longe do vencimento ainda tem a possibilidade de voltar para perto do preço de exercício, o que geraria uma variação de delta, caso ela vença em uma data próxima, seu delta já será zero ou 100 e seu Gamma zero, já que a probabilidade de exercício é 0% ou 100% e não ocorrerá variação de delta.)

2.4.2.1 COMPRADO EM GAMMA (*LONG GAMMA*)

Digamos que em um portfólio de opções sobre uma determinada ação, um operador esteja comprado em 1 milhão de reais em Gamma e com o seu delta protegido direcionalmente (*delta hedged*) nas ações (o delta equivalente das opções está vendido em ações de maneira que o delta resultante na carteira seja zero) em um determinado momento base. Caso a ação subjacente suba 1%, este operador, pela sua medida de Gamma, estará comprado em 1 milhão de reais, com mais 1% de alta e supondo o Gamma estático, ele ficaria comprado em 2 milhões de reais. Caso o ativo subjacente caia 1% desde o momento base, ao invés de subir, este mesmo portfólio ficaria 1 milhão de reais vendido na ação e com uma queda de 2%, 2 milhões de reais vendido.

Essa posição é conhecida como Comprada em gamma (*Long Gamma*). O delta da carteira acompanha o movimento do ativo subjacente de maneira a favorecer o operador, tanto para cima quanto para baixo. É uma posição confortável para o operador de volatilidade que fica cada vez mais comprado em um ativo que esteja subindo e cada vez mais vendido quando o mesmo estiver caindo, como podemos perceber na figura 16, onde o delta do operador aumenta quando o ativo sobe, pois ele está comprado em Gamma.

O operador se encontra nessa situação quando ele está mais comprado nas opções daquele ativo que estão próximas do dinheiro.

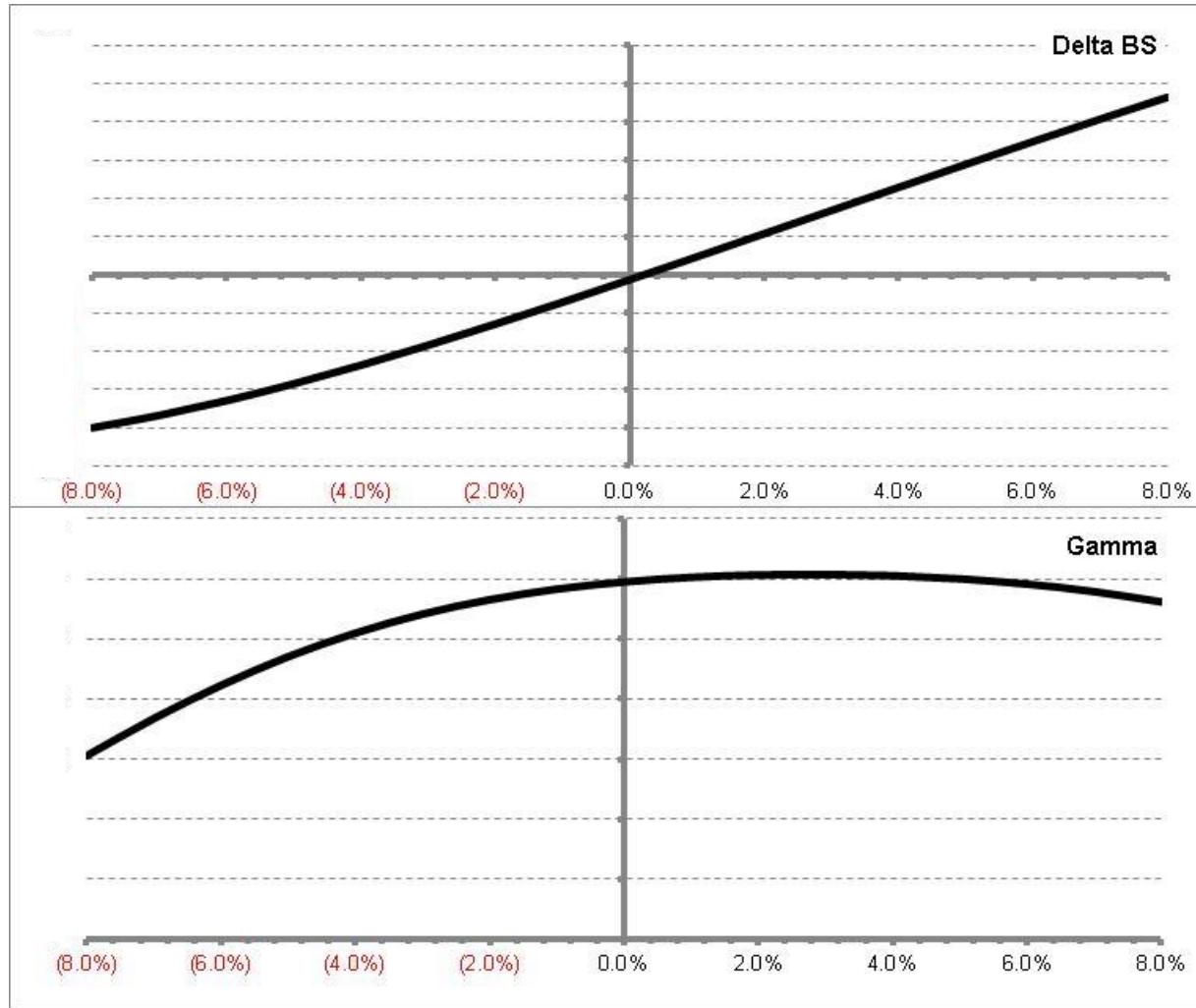


Figura 16 - Posição comprada em gamma - Fonte: autor

2.4.2.2 VENDIDO EM GAMMA (SHORT GAMMA)

O contrário acontece quando em um portfólio de opções sobre uma determinada ação, o operador esteja vendido em 1 milhão de reais em gamma e também protegido direcionalmente (*delta hedged*) nas ações em um determinado momento base. Caso a ação subjacente suba 1% este operador, graças à convexidade de seu portfólio, medida pelo gamma, ficará agora vendido em 1 milhão de reais, com mais 1% de alta, ficará ainda mais vendido, agora em 2 milhões de reais, novamente supondo o gamma estático. E, caso o ativo subjacente caia 1%, partindo novamente do momento base, este mesmo portfólio ficaria 1 milhão de reais comprado na ação e com uma queda de 2%, 2 milhões de reais comprado.

Essa posição é conhecida como vendida em gamma (*Short gamma*), o delta da carteira varia contra o movimento do ativo subjacente de maneira a desfavorecer o operador, tanto para cima quanto para baixo. É uma posição desconfortável para o operador de volatilidade que fica cada vez mais comprado em um ativo que cai e cada vez mais vendido em um ativo que sobe, como podemos perceber na figura 17, onde o delta do operador diminui quando o ativo sobe, pois ele está vendido em gamma.

O operador se encontra nessa situação quando ele está mais vendido nas opções daquele ativo que estão próximas do dinheiro.

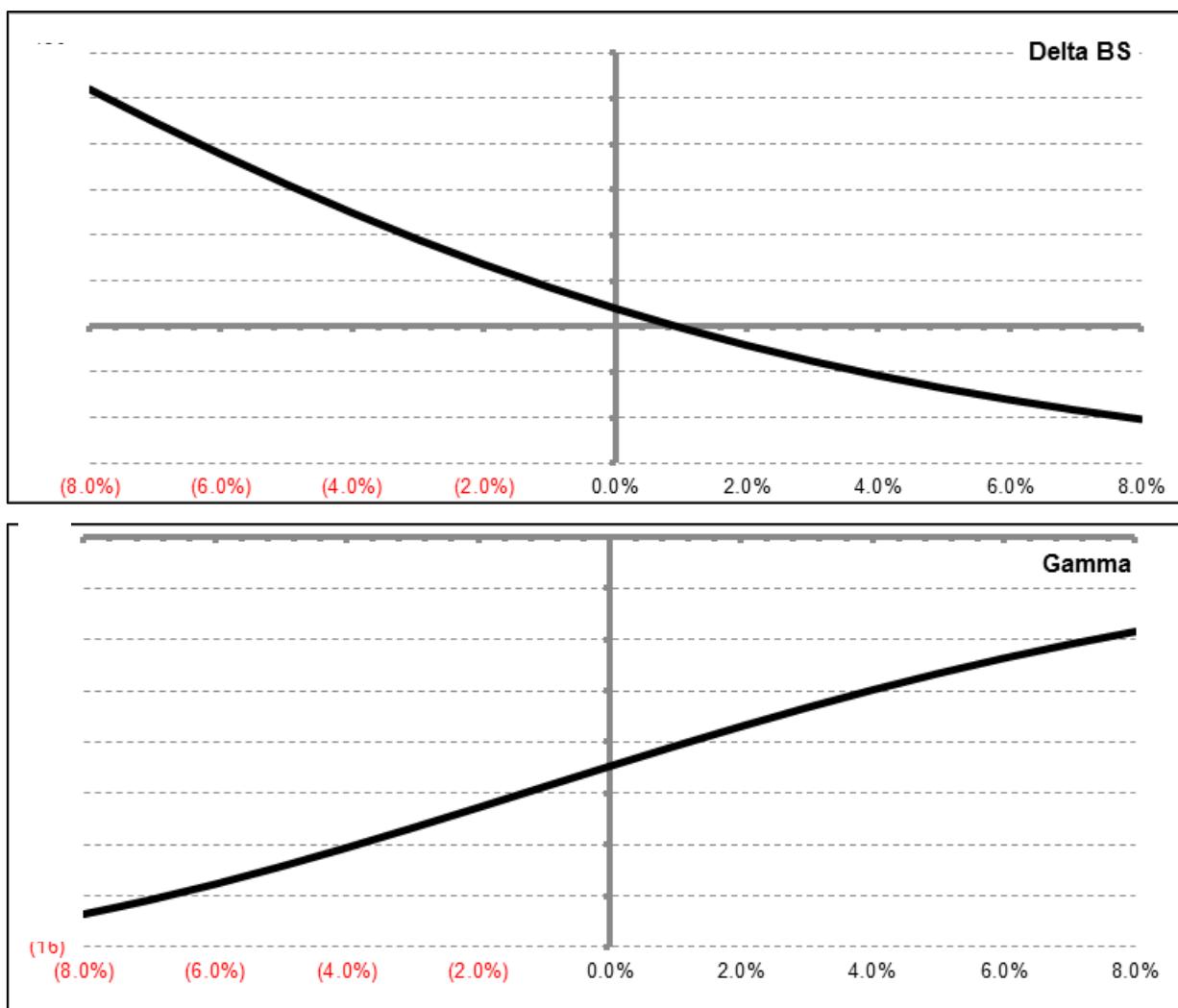


Figura 17 - Posição vendida em gamma - Fonte: autor

2.4.2.3 CARACTERÍSTICAS DO GAMMA

O operador de opções consegue facilmente proteger direcionalmente (*delta hedge*) o seu risco de delta comprando ou vendendo o ativo subjacente da opção, porém conforme o portfólio de opções aumenta ele fica comprado ou vendido em diversos preços de exercício e vencimentos diferentes naquele ativo, como cada uma dessas opções gerará um gamma diferente, a segunda derivada se torna mais complicada de ser mantida neutralizada, já que é necessário negociar opções e não o ativo subjacente (ações, moeda, etc) para neutralizar a exposição de gamma e, muitas vezes não se encontra liquidez suficiente no mercado de opções para fazê-lo. Mas, na maioria das vezes, não é desejo do operador neutralizar sua posição em gamma, que faz parte de sua estratégia.

Portanto o operador de volatilidade convive com uma posição comprada em gamma ou vendida em gamma, um risco que ele deve considerar no gerenciamento de seu portfólio.

2.4.3 VEGA (V)

O vega é a sensibilidade do preço de uma opção à variação da volatilidade implícita da mesma. Ele é medido e observado da mesma maneira que o gamma, em valores absolutos na mesma moeda do delta. O vega é explicado pela equação 2.10, como sendo a derivada do preço do ativo subjacente sobre a derivada da volatilidade:

$$Vega = V = \frac{\partial X}{\partial \sigma} \quad 2.10$$

O vega é a grega mais importante para o operador de volatilidade, sendo o seu valor o negociado no mercado. A posição comprada em vega (*Long Vega*) também é conhecida como comprada em volatilidade; e a vendida em vega (*Short Vega*), vendida em volatilidade.

Sempre que a volatilidade aumenta, o preço de uma opção também aumenta, dado que um ativo com maior volatilidade tem sempre maior probabilidade de atingir o preço de exercício da opção.

Suponhamos uma carteira de opções de uma determinada ação comprada em 100 mil reais de vega em opções de ABEV3 (Ambev Distribuidora de Bebidas S.A.) a 16% de volatilidade (volatilidade aproximada para 1% de variação diária – sessão 2.3.1). Caso a ação de Ambev, ativo considerado defensivo pela sua baixa volatilidade que ocorre pela situação confortável de liderança que essa empresa possui no mercado brasileiro, não realize essa

variação precificada de 1% ao dia e não haja indícios de qualquer evento que possa mudar esse cenário, a volatilidade implícita considerada na precificação de suas opções sofrerá uma queda já que a volatilidade justa para ela não é mais 16%, mas sim, menor.

Nesse momento o operador nota que ele consegue adquirir no mercado opções de ABEV3 a 15% de volatilidade. Sabendo disso, ele muda a marcação de volatilidade na sua carteira de opções de Ambev para 15% de volatilidade, realizando imediatamente um prejuízo de 100 mil reais na carteira pela desvalorização daquelas opções que possui, equivalente aos 100 mil reais de vega que ele se encontrava comprado.

Analogamente, se a volatilidade implícita do ativo subir, o operador marcará um ganho em reais equivalente à sua posição em vega para cada 1% de aumento da volatilidade que ele realizar na sua marcação. Caso o operador atinja seu ganho esperado na posição, ele pode vender as opções que comprou inicialmente a uma volatilidade mais baixa pelo novo preço no mercado, realizando ganhos e fechando a posição.

Como o operador também pode ficar vendido em vega, ele, nesse caso, realiza seus ganhos quando a volatilidade fica mais baixa ou acarreta perdas quando ela aumenta.

A essência da operação de volatilidade é comprar a volatilidade quando o operador acredita que ela vá subir e vendê-la quando ele acredita o contrário. Dessa maneira o operador de “vol” não precisa ter necessariamente uma opinião sobre a direção que aquela determinada ação deve tomar, mas sim se ela se deslocará com pequenas ou grandes variações naquele determinado período de tempo.

2.4.4 THETA (\emptyset)

O Theta é a perda de valor incorrida pela opção com o decorrer do tempo. Para muitos operadores, ele é conhecido como *rent* (Taleb, 1997), por ser negativo quando o operador está comprado em volatilidade, incorrendo em uma perda diária, ou pagamento diário, para manutenção da posição.

O theta de um dia para o outro é a diferença de valor da opção, com todos os outros fatores mantidos constantes, como volatilidade e juros.

Logicamente, ele pode ser explicado pela queda na probabilidade de uma opção atingir o preço de exercício desejado, já que ela tem um dia útil a menos para fazê-lo. Essa queda na probabilidade é refletida na opção como uma queda em seu preço.

Quanto mais perto do vencimento de uma opção próxima do dinheiro, maior será o impacto dessa queda de probabilidade no preço integral da opção, podendo no limite, isto é, no último dia antes do vencimento, 100% do valor da opção ser seu theta, caso ela venha a vencer fora do dinheiro e, portanto, valendo zero.

A quebra do preço de uma opção de compra (*call value*) entre o seu valor intrínseco (*intrinsic value*) e o valor de theta (*time value*) pode ser vista na figura 18.

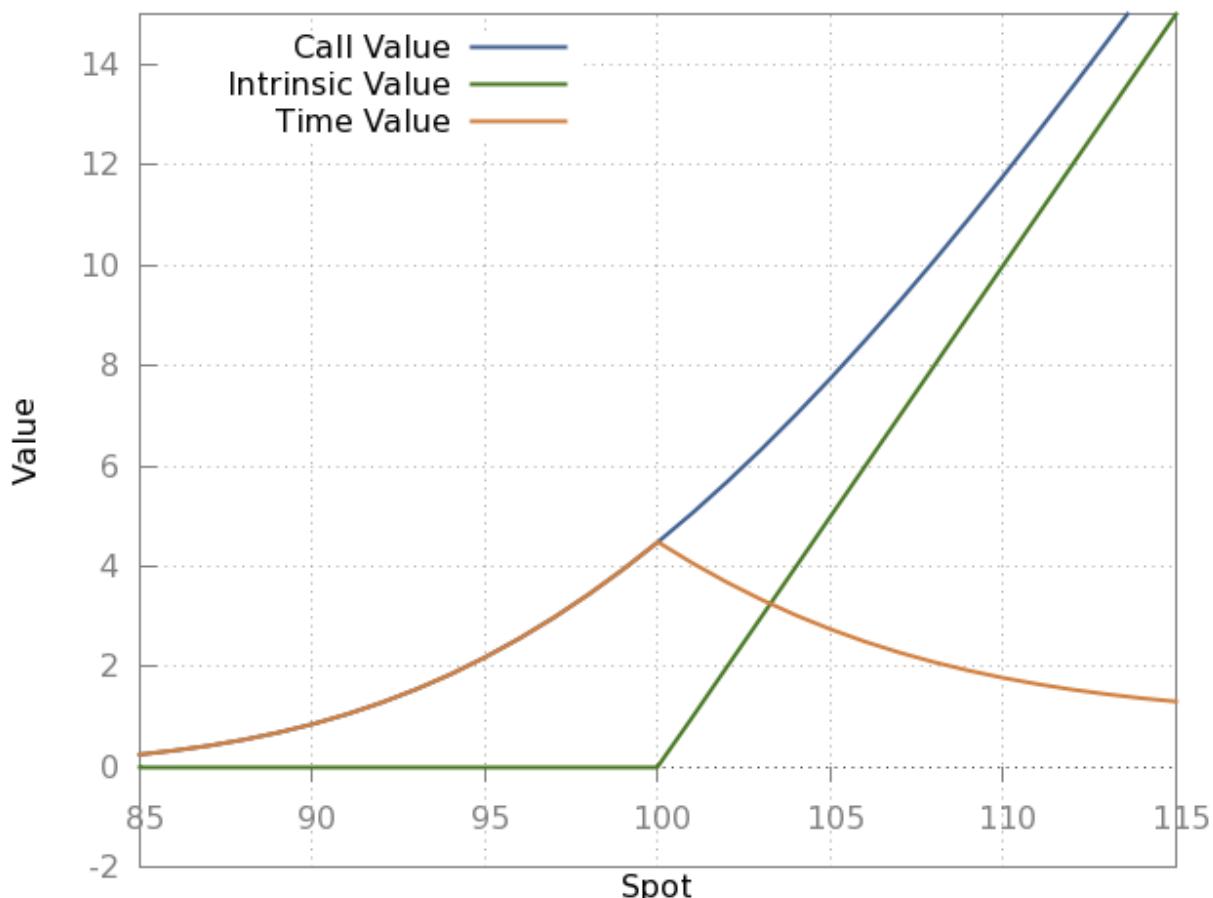


Figura 18 - Decaimento de preço de uma opção no dinheiro com a passagem do tempo - Fonte: quantopia.net

Caso a opção esteja fora do dinheiro, o theta é pago ainda antes da proximidade do vencimento, já que ela atinge 0% de probabilidade de ser exercida e preço zero, antes de seu vencimento. O que pode ser visto nos extremos da figura 18, onde a opção tem valor de theta

quase nulo na proximidade do preço de exercício 85 ou 115 e tende ao valor zero com o distanciamento do preço de exercício.

2.4.4.1 ALPHA - RAZÃO GAMMA THETA (α)

$$\alpha = \frac{\gamma}{\theta} = CTE \quad (2.11)$$

A razão gamma theta de uma opção é constante, mas não é o mesmo para cada opção, portanto conforme uma opção se aproxima do vencimento e seu theta aumenta, seu gamma acompanha esse aumento.

O maior gamma de uma opção incorre um dia antes de seu vencimento e ele será tanto maior quanto mais próximo ela estiver do preço de exercício, já que, nessa situação, ainda há dúvida sobre o exercício ou não daquela opção, gerando grande variação de delta e grande perda de theta em seu último dia de vida.

2.4.5 RHO (ρ)

O rho é a sensibilidade no preço de uma opção à variação da curva de juros futuros.

Como discutimos anteriormente, um aumento na curva de juros da opção leva a um aumento no preço futuro do ativo subjacente, o que leva a um aumento no preço da opção de compra e a uma diminuição no preço da venda.

O rho é mais relevante quanto mais longo for o vencimento de uma opção. Quando a opção é longa o impacto do aumento de juros é acumulado por um número maior de dias úteis. Nas opções curtas, uma variação de taxa de juros gera pouco impacto no preço.

O rho é a grega menos monitorada que vamos discutir e é muitas vezes relevada pelo operador, dado que os impactos de delta, gamma, vega e theta no preço da opção são muito maiores. Mesmo assim, deve-se conhecer o rho e seu impacto no portfólio, caso, por exemplo, haja um aumento da taxa básica de juros pelo Banco Central.

2.5 COMPRANDO E VENDENDO VOLATILIDADE

Para comprar ou vender volatilidade o operador precisa de um portfólio com pelo menos dois instrumentos. O primeiro deve ser um derivativo, cujo perfil de preço seja curvo, côncavo ou convexo, e o segundo, uma posição de exposição de delta contrária ao primeiro instrumento (CONNOLY, 1997).

Restringiremos a nossa discussão a uma carteira de opções e ações. A carteira deve estar balanceada de maneira que o lucro ou prejuízo em um dos instrumentos seja compensado ou cancelado por um prejuízo ou lucro de igual magnitude no segundo instrumento. Por exemplo, um operador comprado em 1000 opções de compra de Petrobrás com delta 40% (de acordo com a equação 2.7) deverá ficar vendido em 400 ações da empresa de maneira a ter, inicialmente, exposição zero de delta, um portfólio direcionalmente protegido. O que significa que, em caso de alta no preço das ações o lucro das opções é compensado por um prejuízo nas ações e o contrário ocorre em caso de queda no preço.

Muitos confundem volatilidade com direção e poucos compreendem como ela é mensurada, mas por estar protegido direcionalmente (delta neutro) o operador de volatilidade não precisa ter uma opinião sobre a direção em que a ação daquela empresa tomará, mas sim sobre como ela atingirá esse novo preço, com fortes ou pequenas variações durante o percurso. Veremos a seguir como ele pode se beneficiar e extrair lucros da exposição a volatilidade.

2.5.1 COMPRADO EM VOLATILIDADE (*LONG VOLATILIDADE*)

O operador entrará em uma posição comprada em volatilidade quando ele acreditar que o preço de uma ação flutuará excessivamente no futuro, mas não faz ideia se para cima ou para baixo ou voltando sempre próxima ao preço inicial, portanto é necessária uma posição que obtenha lucros tanto com a ação caindo ou subindo.

O portfólio necessário pode parecer algo irreal e difícil de obter, porém veremos que é de fácil construção. Para isso, precisamos somente começar com uma posição que seja inicialmente neutra em relação ao mercado e que se torne vendida (*short*) quando ele caia e comprada (*long*) quando ele suba.

A posição mais simples comprada em volatilidade que podemos estudar é a posição da carteira comprada em opções de compra (delta positivo) e vendida nas ações (delta negativo). O operador também consegue exatamente o mesmo resultado comprando opções de venda (delta negativo) e comprando as ações (delta positivo). Consideraremos a mesma posição discutida anteriormente, uma posição comprada em 1000 opções de compra de Petrobrás delta 40% e vendida em 400 ações da mesma empresa (delta zero – posição neutra ao mercado). De acordo com a equação 2.17, teremos um portfólio sem risco direcional (de delta):

$$\text{Delta Portifólio} = 1000 \text{ opções} * 0.4 (\text{40\% delta}) - 400 \text{ ações} = 400 - 400 = 0$$

Como podemos ver na figura 19, com pequenas variações do preço da ação o lucro ou prejuízo captado pela opção é compensado pela ação. Porém grandes variações no preço da ação levam a uma participação significativa do gamma comprado nas opções no delta da carteira.

O primeiro gráfico com o lucro da ação segregado do lucro da opção mostra que, com o gamma comprado uma grande variação para cima torna a carteira comprada (delta positiva) e uma grande variação para baixo, a torna vendida (delta negativa) de maneira que o operador obtém lucros tanto na alta, como na baixa do papel. E, no segundo gráfico, com o lucro da operação no eixo vertical contra o preço da ação no eixo horizontal, verificamos que pelo formato côncavo (exponencial) do perfil, um incremento de variação de preço no papel leva a um aumento exponencial da exposição no mesmo e também dos lucros recebidos com a posição, portanto quanto maior a variação da ação, maior é o lucro na posição.

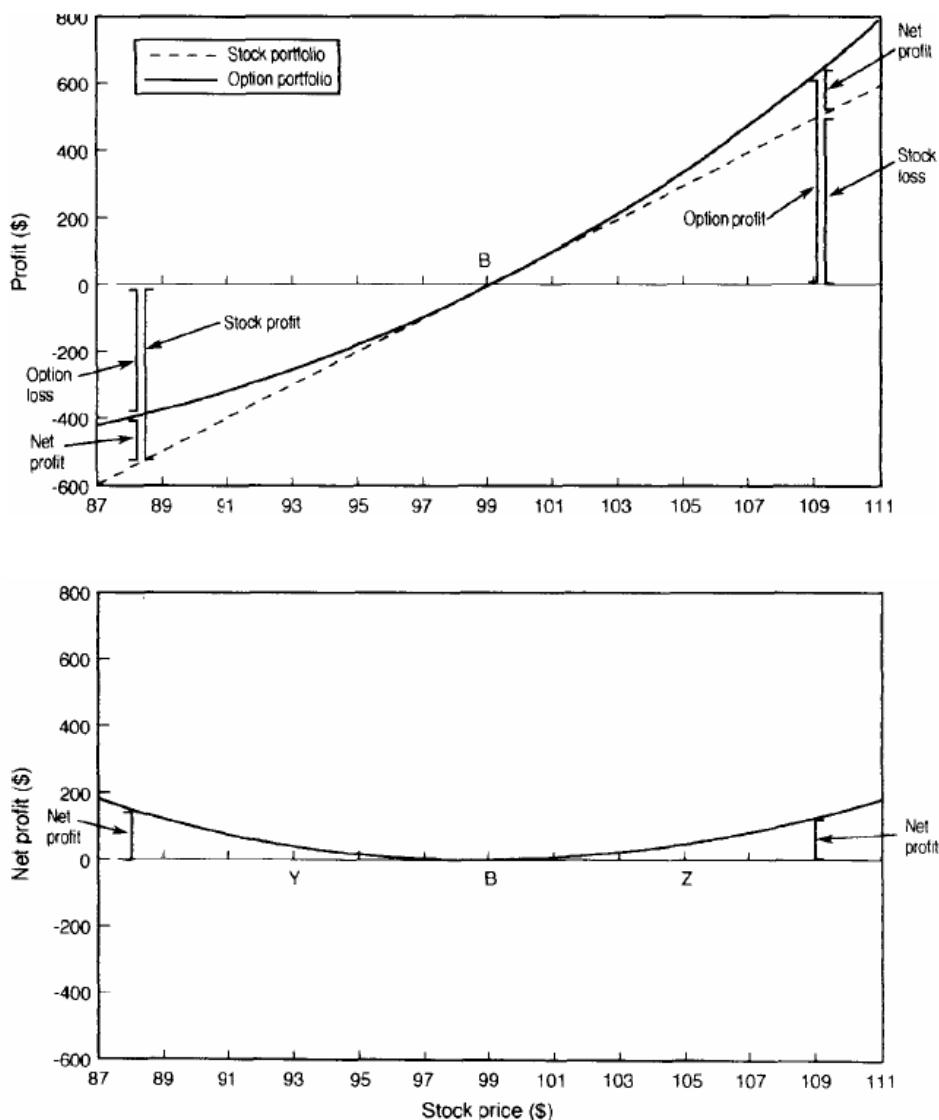


Figura 19 - Trade Long Volatilidade – Fonte: Connolly (1997)

Esse formato exponencial da curva de lucro faz com que, se o lucro recebido com uma variação de 1% é de um real, com 2% teremos quatro reais e com 3%, nove reais. Dito isso, mostramos que o operador comprado em volatilidade é recompensado tanto na alta como na baixa do papel e seu lucro é cada vez maior, quanto maior for a variação percentual da ação.

2.5.2 REALIZANDO LUCROS – COMPRADO EM VOLATILIDADE

Para capturar o lucro de uma posição comprada em volatilidade, basta que o operador compre ou venda as ações de maneira a retornar à posição inicial delta neutra (*Delta Hedging* ou *Dinamic Hedging*), ou seja, execute a sua proteção direcional. Ao realizar a venda ou compra das ações, o operador captura o diferencial entre os ganhos e perdas com as ações e as opções visto no segundo gráfico da figura 4 e retorna à posição inicial da operação, onde independente da direção do movimento do papel e realiza um lucro, o que é a essência da carteira comprada em volatilidade. O processo de neutralização do risco direcional (risco de delta) leva o operador a comprar a ação depois que ela caiu, já que ele fica com delta negativo, e a vendê-la depois de uma alta, pois ele estará com o delta positivo.

Se o operador não executar a neutralização da carteira ele continua com o risco direcional sobre a sua posição e haverá dois cenários possíveis. Caso a ação continue o movimento para a mesma direção que a inicial, seu lucro aumentará de maneira exponencial, como já foi visto, mas caso ela retorne em direção ao ponto de partida, aquele lucro que seria obtido com o primeiro movimento será revertido e o operador o perderá, retornando à posição inicial sem obter nenhum lucro.

Não há uma definição correta de quando o operador deve realizar essa neutralização e realização de lucro da carteira. Existem diversas metodologias e estudos a respeito, porém cada operador decide qual será sua estratégia. Normalmente, caso ele acredite que a ação perpetuará seu movimento na direção inicial, ele não faz a neutralização para continuar usufruindo do movimento e do lucro da posição e, quando ele acredita que a ação voltará em direção ao ponto inicial, ele executa a operação de neutralização direcional da carteira, de maneira que ele “trava” (realiza) o lucro do primeiro movimento. Com a volta da ação ao ponto inicial, ele duplicaria esse lucro, ganhando também com a volta do papel ao seu preço inicial, e fazendo novamente a neutralização da posição ao término do movimento.

Caso ele esteja errado em sua suposição na primeira situação e não faça a neutralização da carteira, ela retorna à posição inicial, e ele deixa de receber os lucros. Já no segundo caso, se ele estiver errado e fizer a neutralização da posição e o movimento se perpetuar, ele garante a captura de um lucro menor e começa de novo a posição na base da curva exponencial, levando-o a não capturar de um lucro que poderia ser exponencialmente maior.

2.5.3 REALIZANDO PREJUÍZOS – COMPRADO EM VOLATILIDADE

Até agora a posição comprada em volatilidade parece imbatível. Uma posição onde você ganha tanto com a alta quanto com a baixa de uma ação é excelente, porém até agora, todas as suposições foram feitas considerando que o tempo não teve influência na carteira.

Para que o operador esteja comprado em volatilidade ele deve estar comprado em opções e, devido a isso, ele paga theta, ou aluguel para manter a posição, conforme vimos na seção 2.4.4 uma opção perde valor com o passar do tempo (theta), como mostrado na figura 20, incorrendo em um pagamento diário de aluguel pelo operador. Todos os dias a posição começa perdendo o theta diário e, para que o operador não realize prejuízo naquele dia, a ação tem que variar mais do que o ponto de equilíbrio financeiro de volatilidade da posição, para que ele seja capaz de “travar” (realizar) lucros com o processo de neutralização direcional maiores do que o seu theta diário.

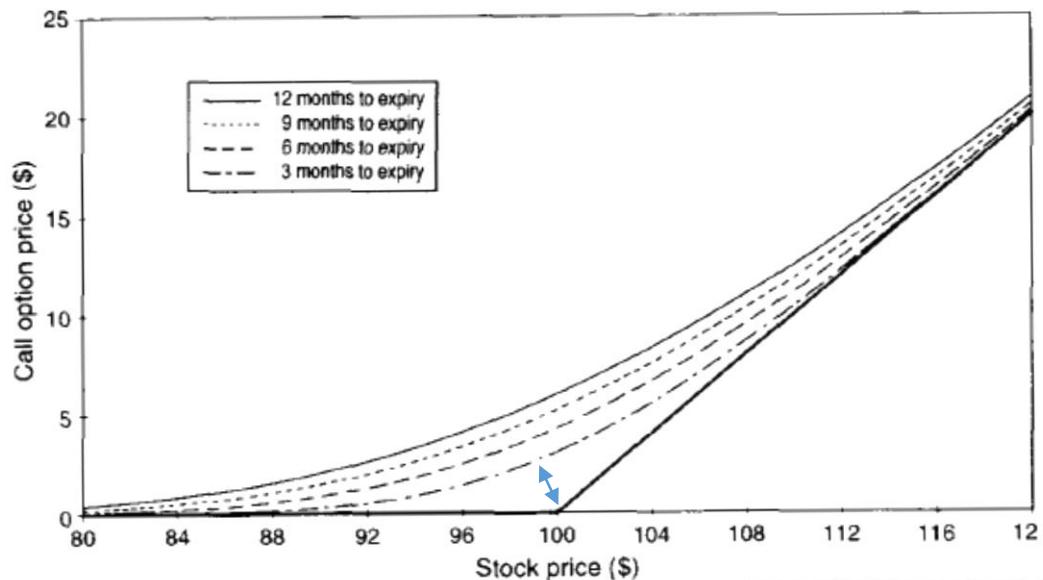


Figura 20 - Efeito do Theta sobre o preço de uma opção no decorrer do tempo – Fonte: Connolly (1997)

Caso o ativo permaneça estável durante o dia inteiro ou o operador perca suas oportunidades de fazer a neutralização, conforme discutido na seção anterior, ele será incapaz de “pagar” a totalidade do theta daquele determinado dia, realizando um prejuízo na posição.

O theta de uma posição será maior quanto maior for a volatilidade implícita paga por aquelas opções e quanto menor for o tempo para o vencimento. No limite, o dia anterior ao vencimento das opções da carteira será o dia de maior theta da posição do operador, caso essas opções continuem próximas ao dinheiro.

Mesmo assim a posição comprada em volatilidade é confortável dado que o processo de neutralização ocorre sempre a favor do operador e ele limita sua perda máxima diária ao theta da posição, sendo que, caso a ação sofra uma variação muito grande naquele dia, seu lucro também tende a acompanhar exponencialmente essa variação.

2.5.3 VENDIDO EM VOLATILIDADE (SHORT VOLATILIDADE)

A contrapartida da posição comprada em volatilidade é a posição vendida em volatilidade. Nesse caso o operador se encontra na outra ponta da operação, vendido em opções. O operador vendido em volatilidade tem como objetivo a permanência da ação no mesmo preço ou que ela se desloque com pequena velocidade e de maneira previsível tanto para cima, quanto para baixo. O que foi discutido anteriormente para a posição comprada em volatilidade funcionará ao contrário para essa posição.

A posição vendida em volatilidade fica delta vendida (*short*) quando a ação sobe e comprado (*long*) quando ela desce. Essa situação leva o operador a incorrer prejuízos com a variação da ação da carteira. Com isso ele fica compelido a comprar ações depois que ela subiu e, portanto, de maneira mais cara para evitar que ele fique cada vez mais vendido na alta da ação e a vender ações depois de uma queda, portanto vendendo mais barato para evitar ficar comprado em uma ação que está caindo.

Ao contrário do operador comprado em volatilidade, a proteção direcional quando se está vendido em volatilidade incorre em realizar um prejuízo para a posição. Quanto menor for a frequência de neutralização melhor será para a posição. Por outro lado, da mesma maneira que na operação comprada em volatilidade, quando se decide por não executar a neutralização, o operador aceita tomar o risco direcional (delta) da posição. Porém, dessa vez, o risco é muito maior, já que o lucro da posição vendida em volatilidade é limitado ao theta da posição e o prejuízo é ilimitado no caso de uma variação muito grande da ação.

Podemos ver na figura 21 que quanto maior a variação da ação, maior é o prejuízo do operador; temos, portanto, uma situação contrária à da carteira comprada em volatilidade.

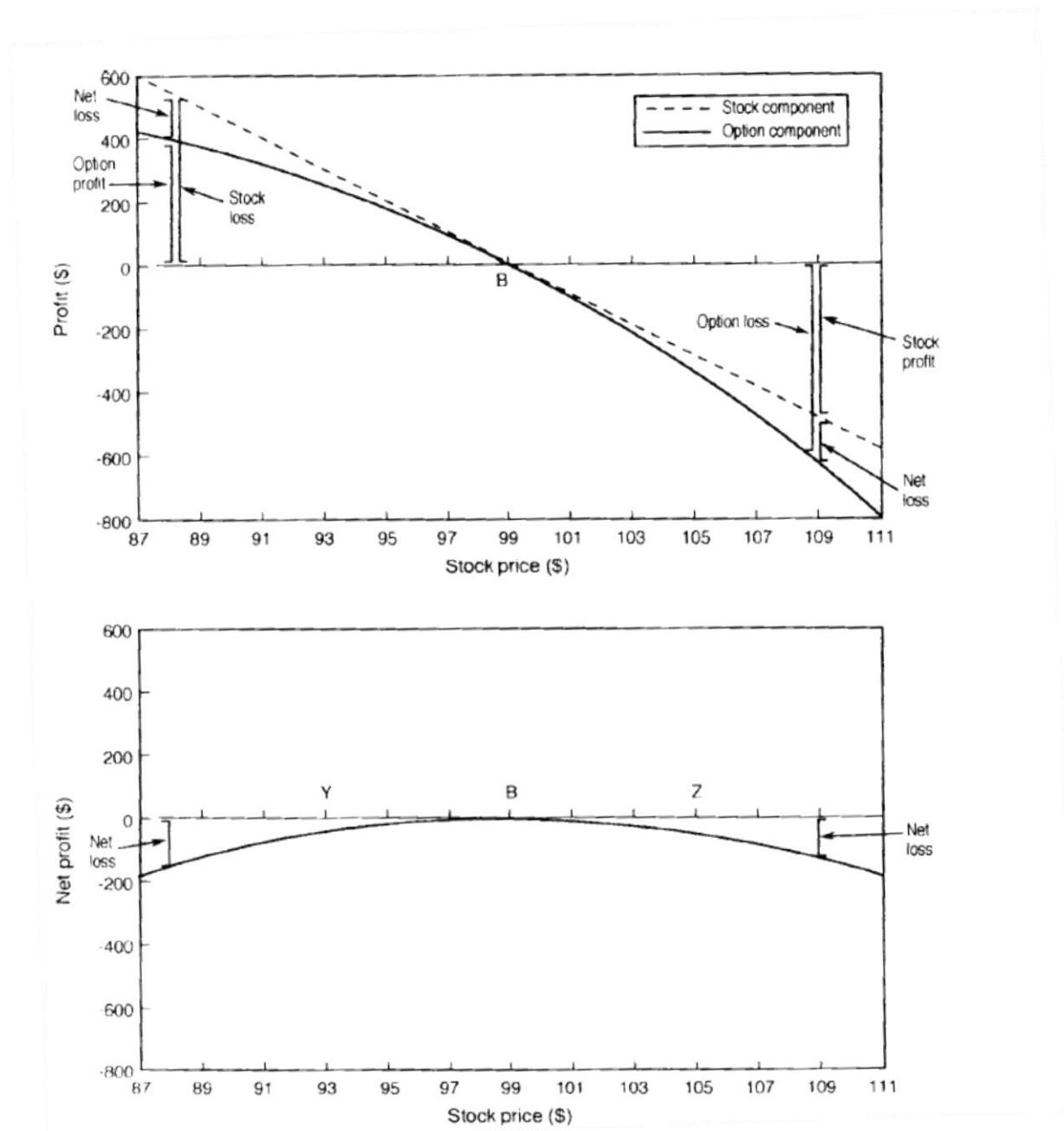


Figura 21 –Trade Short Volatilidade - Fonte: Connolly (1997)

Um operador entra em uma posição vendida em volatilidade, mesmo com os riscos altos, caso a volatilidade implícita que deve ser paga nas opções sobre aquela ação esteja muito cara (alta) e o operador opta por vendê-la afim de realizar lucros com a venda do prêmio daquelas opções. Ele consegue atingir esse objetivo quando a volatilidade realizada pelo ativo é menor do que a volatilidade implícita vendida por ele nas opções e, portanto, o ganho de theta

relativo às opções vendidas será maior do que a perda incorrida pela obrigação de a neutralização direcional da posição. Nessa situação ele teria prejuízo na posição comprada em volatilidade, já que ele não seria capaz de pagar o theta da posição com a pequena variação da ação.

2.5.4 RISCOS DA POSIÇÃO VENDIDA EM VOLATILIDADE

Entretanto não é possível negar que o risco da posição vendida em volatilidade é muito maior do que o da posição comprada. A posição vendida em “vol” já levou bancos e fundos à falência devido à sua natureza de perdas infinitas (ou muito grandes) quando ocorre uma grande queda nos mercados (*market crash*) ou grande alta nos mercados (*Market Rally*).

A maior posição vendida em volatilidade de que se tem conhecimento foi de um operador de opções de um banco inglês, Barings, em 1995 (CONNOLY, 1997). No ano de 1995 a bolsa japonesa, Nikkei, não tinha saído de um raio de $\pm 5\%$ de variação e ele acreditava que isso se perpetuaria no ano seguinte, portanto vendeu volatilidade via opções, mas um terremoto atingiu o Japão.

Em um primeiro momento, ninguém no mercado podia compreender porque o índice de ações japonês não caía, já que se calculava que os danos causados levariam a uma queda de pelo menos -5% nas ações das empresas listadas. A facilidade em vender o índice era enorme e ele não caía, o que gerou a suspeita da existência de um comprador misterioso no mercado. Esse operador de volatilidade notou que, caso a bolsa japonesa caísse e ele fosse forçado a fazer a neutralização direcional da posição, vendendo futuros do índice para evitar que sua posição vendida em gamma tornasse seu delta comprado com a queda do índice, ele empurraria o mercado ainda mais para baixo, pois teria que vender o índice caindo, portanto ele estava comprando os futuros contra o mercado na esperança de manter o mercado estável.

A estratégia funcionou por alguns dias e o fez acumular milhares de contratos comprados em Nikkei, porém em um dado momento, ele se viu sem mais dinheiro para comprar os contratos e incapacitado de segurar a força de venda do resto do mercado. A situação desse operador eventualmente se tornou pública, dado que um único comprador de contratos futuros de uma bolsa fadada à queda logo foi descoberto e, como o Barings se encontrava em processo de liquidação pelo Banco Central da Inglaterra (*Bank Of England*), essa situação levaria o *BOE*

a vender milhares de contratos de Nikkei para proteger a posição comprada daquele operador de volatilidade. Com isso o mercado imediatamente caiu 15%, levando uma das mais respeitadas instituições inglesas à falência. As perdas são estimadas em 860 milhões de libras esterlinas para o Barings, que foram repassadas ao resto do mercado que estava comprado em volatilidade ou vendido em delta, trocando o dinheiro de mãos.

3. MODELO DE PRECIFICAÇÃO – BLACK-SCHOLES

Já adquirimos conhecimento sobre os produtos e os riscos associados às operações com opções. Nos falta agora entender como efetivamente uma opção é precificada, o que é fundamental para operar volatilidade. A seguir analisaremos a precificação de opções pelo modelo de Black-Scholes que é o modelo mais utilizado nos mercados internacionais e tido como padrão para precificações.

Antes de estudarmos o Black-Scholes, veremos o modelo binomial, seu precursor e base para sua criação.

3.1 MODELO BINOMIAL

A técnica da árvore binomial já foi largamente utilizada e muito popular. Por ser simples de implementar era utilizado por diversos operadores e, ainda hoje, pode ser uma alternativa mais fácil de modelar do que o Black-Scholes (HULL, 2007).

3.1.1 ÁRVORE BINOMIAL

Para entender o modelo vamos supor a venda de 80 opções de compra de uma determinada ação. A ação dessa empresa vale atualmente 10 reais e a opção tem preço de exercício de 12 reais com vencimento em 3 meses.

Para montar a árvore partiremos do argumento simples de que a ação dessa empresa poderá valer, em três meses, um entre os dois seguintes valores: 6 reais ou 14 reais. Além disso, pressupomos que não existem possibilidades de arbitragem no mercado.

Sabemos então que, ao final de três meses, as opções de compra valerão ou 0 reais, no primeiro caso ou 2 reais, no segundo, de acordo com a equação 2.1. A situação é ilustrada na figura 22 a seguir.

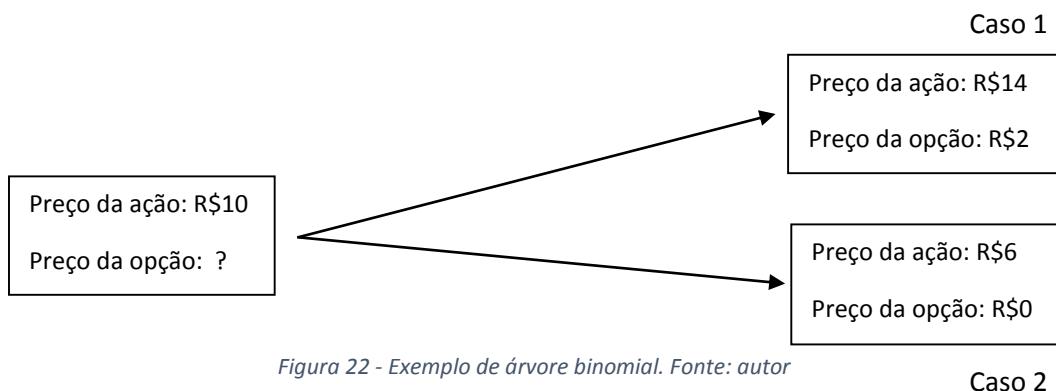


Figura 22 - Exemplo de árvore binomial. Fonte: autor

Caso 2

A partir dessa árvore precisamos montar um portfólio delta neutro com essas opções. Faremos isso, porque um portfólio delta neutro deve render a taxa de juros livre de risco do mercado, para não haver possibilidade de arbitragem, já que uma carteira neutralizada direcionalmente não está sujeita ao risco de variação do mercado e, portanto, pode ser comparada a um investimento de renda fixa, que renderá exatamente a taxa de juros livre de risco daquele mercado. Com isso em mente sabemos que o valor final do portfólio deve ser zero (não havendo qualquer lucro ou prejuízo obtido com a posição ao final do período).

Para obter a quantidade de ações que deve ser comprada para termos o portfólio livre de risco utilizaremos a árvore. No cenário livre de risco, ambos os casos têm que possuir o mesmo valor de mercado, pois o investimento se comporta como um investimento de renda fixa. Precisaremos comprar X ações de maneira que o valor de ambos seja o mesmo.

$$\text{Valor da carteira (Caso 1)} = \text{Valor da carteira (Caso 2)} \quad (3.1)$$

$$14 \text{ reais} * X \text{ ações} - 80 \text{ opções} * 2 \text{ reais} = 6 \text{ reais} * X \text{ ações} - 80 \text{ opções} * 0 \text{ reais}$$

$$X = 20 \text{ ações}$$

Portanto teremos uma carteira livre de risco composta por duas posições:

- Vendida em: 80 opções de compra (preço de exercício 12 com vencimento em 3 meses)
- Comprada em: 20 ações

Observação: mostramos que o delta dessas opções é igual a 25% ($20/80 = 0,25$), de acordo com a equação 2.7.

Na primeira situação, com a ação a 14 reais a carteira vale 120 reais, mesmo valor da segunda situação, com a ação a 6 reais.

Portanto sabemos que o valor dessa carteira no vencimento da opção é de 120 reais, independente do movimento da ação ou do valor final da opção. Supondo uma taxa de juros livre de risco (r) de 12,25% a.a. (a taxa SELIC de 22 de janeiro de 2015), a carteira vale hoje o valor presente (VP, equação 3.2) desses mesmos 120 reais nos 3 meses de validade da opção.

$$VP = \frac{120}{(1 + r)^{\frac{DU}{252}}} \quad (3.2)$$

$$VP = 120 * e^{-0,1225 * \frac{90}{360}} = 115,15 \text{ reais}$$

Portanto, como sabemos que o preço da ação hoje é de 10 reais, temos que:

$$10 \text{ reais} * 20 \text{ ações} - 80 \text{ opções} * Y \text{ reais} = 115,15 \text{ reais}$$

$$Y = 1,06 \text{ reais}$$

Pelo modelo binomial e admitindo que não haja possibilidades de arbitragem, o valor atual da opção estudada é de R\$1,06.

Caso a opção valha mais do que R\$1,06 o portfólio custaria menos do que R\$115,15, de acordo com a equação 3.1 e, para ser montado o que significaria que ele renderia mais do que a taxa de juros livre de risco do mercado, levando à possibilidade de se tomar dinheiro emprestado à taxa de juros livre de risco e comprar o portfólio, obtendo lucros e arbitrando o mercado. No outro cenário, caso a opção valha menos do que R\$1,06, pode-se vender o portfólio por um valor maior do que R\$115,15 e aplicar o dinheiro obtido à taxa de juros livre de risco, obtendo também um lucro com a operação e arbitrando o mercado.

Portanto, provamos que o valor justo para essa opção é de R\$1,06 pelo modelo binomial.

3.1.2 GENERALIZAÇÃO DO MODELO BINOMIAL

O modelo discutido pode ser usado para qualquer opção, basta determinar os cenários finais possíveis e fazer a regressão para o momento inicial da operação. Para obter resultados mais exatos, deve-se cobrir uma maior extensão de possíveis cenários e determinar o preço da opção em diversos momentos durante a sua validade. O modelo pode ser alongado utilizando uma maior quantidade de nós e períodos.

É possível replicar o mesmo exemplo acima com uma árvore binomial dividindo o período de três meses em duas etapas de um mês e meio. O exemplo ficaria como ilustrado na figura 23:

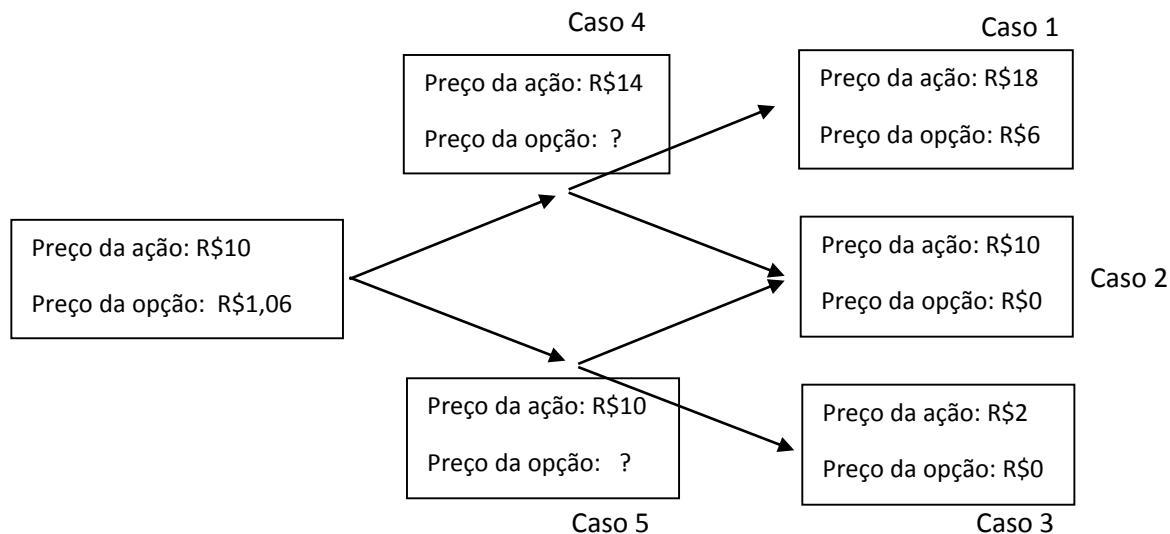


Figura 23 - Exemplo de árvore binomial de dois nós. Fonte: autor

A árvore com dois nós deve ser resolvida de maneira análoga à anterior: um nó por vez, começando pelo último nível, quando já se sabe o preço da opção no seu vencimento. O resultado do nó inicial será sempre o mesmo, no caso R\$1,06. Porém quando adicionamos os nós intermediários também teremos conhecimento do preço da opção no decorrer de sua validade.

Dessa maneira é possível determinar o preço das opções em vários momentos e interpolar os resultados, determinando a curva de preço da opção.

Na prática, quando o modelo binomial é utilizado, a vida da opção é dividida em mais de dez períodos com um movimento binomial da ação. Isso leva a um cálculo de 2^n nós em

uma árvore de n passos, atingindo um bilhão de possíveis trajetos para a opção quando tivermos uma árvore de 30 nós. Softwares atuais possibilitam o cálculo para árvores de mais de 500 nós e a visualização de árvores que possuem até aproximadamente 10 nós.

Portanto o modelo tem uma limitação de capacidade de cálculo que impede a especificação contínua de uma opção e leva o computador em que foi implementado a recalcular todos os nós caso haja uma mudança de variável.

3.2 PROCESSO DE WIENER

O processo de Wiener ou movimento Browniano, como também é conhecido, é usado em modelos de física e do mercado financeiro. Deduzido a partir de estudos na natureza, ele descreve o momento de um aglomerado de partículas que sofre choques moleculares aleatórios, partindo da premissa de que os movimentos seguem um desenho de uma distribuição normal (HULL,2007).

3.2.1 GENERALIZAÇÃO DO PROCESSO DE WIENER

Segue que uma partícula que respeita o processo de Wiener possui duas propriedades (Hull, 2007):

- 1) O deslocamento (z) de uma partícula em um pequeno período de tempo (t) é dada por:

$$\partial z = \in \sqrt{\partial t} \quad (3.3)$$

Sendo \in um trajeto aleatório que segue uma distribuição normal.

- 2) Os valores de z para dois intervalos diferentes de tempo (t) são independentes e também respeitam uma distribuição normal.

Assumiremos uma variação grande de tempo onde $z(t_1) - z(0)$ representa a variação da posição da partícula no período. Essa variação de posição pode ser representada pelo somatório de pequenas variações incorridas em incrementos de tempo Δt . Recorrendo à equação 3.3, teremos que:

$$z(t_1) - z(0) = \sum_{i=0}^n \in_i \sqrt{\Delta t} \quad (3.4)$$

A variância do processo de Wiener cresce linearmente com o tempo, seguindo uma taxa de variância de 1.0 e uma tendência (*drift*) de zero, caracterizando um processo estocástico não estacionário. A taxa de variância 1.0 significa que a variância da mudança no valor de z em um dado tempo t_1 será igual a t_1 , já a tendência zero significa que o valor esperado de z para um momento futuro é sempre igual ao seu valor atual.

Dada a necessidade de generalização do processo de Wiener, consideraremos a inclusão da possibilidade de ocorrência de tendência, que pode ser causada por qualquer mudança de cenário no mercado, como novas informações ou mudanças de paradigma e perspectivas para aquele determinado ativo. O processo de Wiener generalizado para um ativo x será representado pela equação 3.5 (Hull, 2007):

$$dx = adt + bdz \quad (3.5)$$

Onde a e b são constantes e $dz = \in \sqrt{dt}$ como visto anteriormente.

O termo adt que foi incluído implica que o ativo x tenha uma tendência de a por unidade de tempo e o termo bdz adiciona ao processo de Wiener original a variabilidade b , como é mostrado na figura 24.

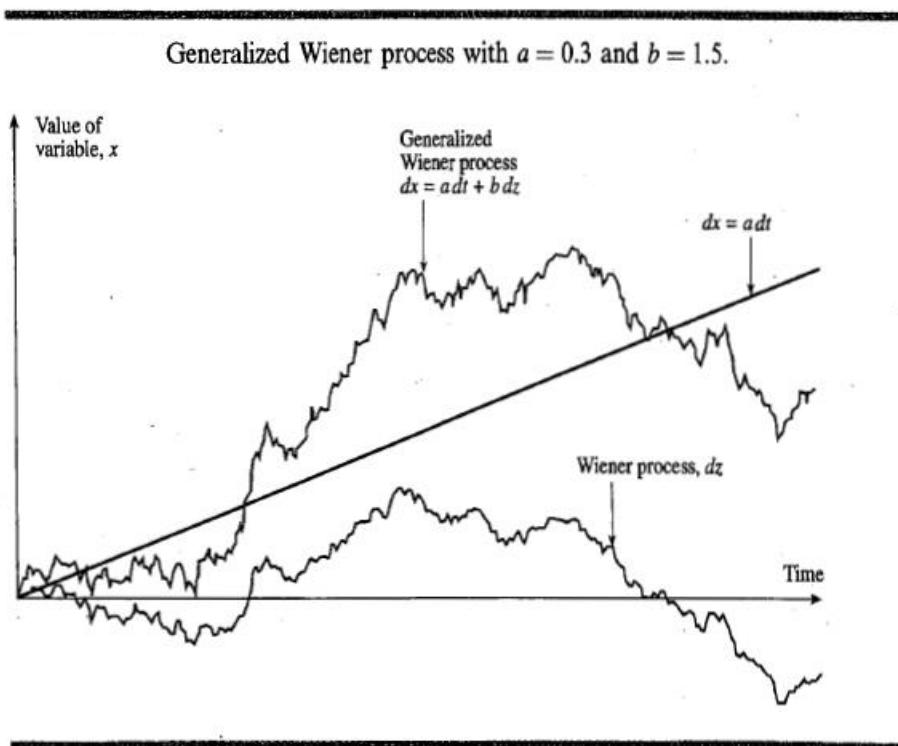


Figura 24 - Processo de Wiener Generalizado – Fonte: Hull, 2007

Temos então que o processo generalizado de Wiener tem uma taxa de tendência esperada de a (constante) e uma taxa de variância de b^2 .

3.2.2 PROCESSO DE WIENER PARA PREÇOS DE AÇÕES

O processo generalizado de Wiener está quase pronto para ser utilizado para preços de ações, porém ele ainda falha em incluir o percentual esperado de retorno para um ativo, a taxa de juros livre de risco, o que é essencial para se considerar um investimento em qualquer ativo.

A premissa da tendência constante está equivocada, pois qualquer mudança no cenário em que está inserida a ação a alteraria, portanto trocaremos a expectativa de uma taxa de tendência constante do ativo para uma suposição de que o retorno esperado do ativo, ou a razão da tendência pelo preço do ativo, seja constante. De maneira que, se o retorno esperado para um ativo de R\$10 é de 12% a.a., o retorno esperado para um ativo de R\$50 também será de 12% a.a.

Partimos do processo generalizado de Wiener (equação 3.5) e incluiremos μ , taxa esperada de retorno do ativo expressa em formato decimal, portanto $a = \mu S$, sendo S o preço da ação, teremos a equação 3.6:

$$dS = \mu S dt + bdz \quad (3.6)$$

Com volatilidade zero ($bdz = 0$), o modelo implica que:

$$dS = \mu S dt$$

Ou
$$\frac{dS}{S} = \mu dt$$

Integrando no intervalo de tempo 0 e T, temos que:

$$S_t = S_0 e^{\mu t} \quad (3.7)$$

Portanto, a equação 3.7 mostra que quando a volatilidade é zero a ação varia a uma taxa composta de μ por período de tempo, como um ativo de renda fixa que acumula juros no período. Como a premissa de volatilidade zero não é compatível com o mercado de ações, temos que b é igual à volatilidade da ação, representada pelo seu desvio-padrão (σ):

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (3.8)$$

A equação 3.8 é a mais utilizada na modelagem do comportamento do preço de uma ação, onde σ é a volatilidade do preço da ação e μ a taxa esperada de retorno. Esse modelo pode ser visto como uma adequação ou evolução do modelo de árvores binomiais, visto anteriormente, para caminhos aleatórios possibilitando o cálculo quando o intervalo de tempo considerado fica cada vez menor (dt).

3.3 LEMA DE ITÔ

O lema de Itô utiliza como premissa o processo generalizado de Wiener para a especificação de derivativos ou, no caso, opções sobre ações. Podemos dizer que o preço de qualquer derivativo é uma função das variáveis subjacentes e do tempo. Itô em 1951 estudou essas variáveis e propôs a seguinte equação para a especificação de derivativos, supondo que os valores de μS e σS sejam funções de S e t , partindo da equação 3.8 do processo generalizado de Wiener.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (3.8)$$

O lema de Itô (equação 3.9) mostra que uma função G de S e t ($G(S,t)$) segue o processo:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dz \quad (3.9)$$

Da equação 3.9, temos que dz segue um processo de Wiener, onde o tendênciá é $\left(\frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right)$, anteriormente a e a variabilidade é $\left(\frac{\partial G}{\partial S} \right)^2 \sigma^2 S^2$, anteriormente b^2 . Não está no escopo do trabalho a uma prova rigorosa do lema do Itô, mas o utilizaremos no modelo de Black-Scholes já que S e G são afetadas pela mesma fonte de incerteza, dz , o processo de Wiener, o que será de extrema importância para os resultados do modelo.

3.4 MODELO LOG-NORMAL

Utilizando o lema de Itô para derivar o processo S , definiremos que $G = \ln S$ (propriedade Log-normal do processo G). E, portanto, teremos as seguintes propriedades de contorno:

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2} \quad (3.10)$$

Da equação 3.9 e das propriedades de contorno definidas temos, portanto que o processo seguido por G seja:

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \quad (3.11)$$

Como μ e σ são constantes o processo $G = \ln S$ segue um processo de Wiener generalizado com taxa de tendência constante de $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ e variância constante de σ^2 e a variação de S entre o tempo 0 e T é normalmente distribuída.

Portanto, o modelo desenvolvido tem como premissa que o preço da ação a um dado tempo T , sabendo o preço atual dessa ação seguirá uma curva log-normal, será lognormalmente distribuído. O desvio-padrão do logaritmo do preço da ação S será $\sigma\sqrt{T}$ e, portanto, proporcional à raiz quadrada do período, como foi visto no capítulo 2, na definição do cálculo de volatilidade realizada.

3.5 MODELO DE BLACK-SCHOLES

A partir do processo de preços assumido na sessão anterior, temos que, a partir das equações 3.8 e 3.9:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (3.12) \quad \text{e,}$$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz \quad (3.13)$$

Assumiremos que f seja o preço de uma opção de compra ou de venda de ativo subjacente S . O lema de Itô prova que o processo de Wiener subjacente a f e S são o mesmo, $dz(f) = dz(S)$. A partir disso podemos construir uma carteira que elimina o processo de Wiener dz e, portanto, elimina o fator aleatório de variabilidade do modelo.

O portfólio que utilizaremos terá valor Π , e será construído por:

-1 opção

$+\frac{\partial f}{\partial S}$ ações

O detentor desse portfólio terá:

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \quad (3.14)$$

Substituindo as equações 3.12 e 3.13 em 3.14, teremos que o portfólio segue a equação 3.15:

$$\Delta \Pi = -\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2\right) \Delta t \quad (3.15)$$

Eliminamos dz com sucesso, portanto o portfólio será neutro no tempo Δt e deve render a taxa de juros livre de risco (r) para que não haja possibilidade de arbitragem.

$$\Delta \Pi = r \Pi \Delta t \quad \text{Segue que:}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2\right) \Delta t = r \left(f + \frac{\partial f}{\partial S} S\right) \Delta t$$

Reorganizando:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} rS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2\right) = rf \quad (3.16)$$

A equação acima (3.16) é conhecida como equação diferencial de Black-Scholes, aplicaremos as seguintes condições de contorno para resolvê-la para o caso de uma opção de compra e uma opção de venda:

- Opção de compra (Call): $f = \max(S - K, 0)$, com $t = T$ (como visto no capítulo 2)
- Opção de venda (Put): $f = \max(K - S, 0)$, com $t = T$ (como visto no capítulo 2)

Resolvendo a equação 3.16 para essas condições de contorno, Black e Scholes chegaram aos seguintes valores justos para o preço de uma opção de compra (c) e de uma de venda (p) por um valor de Δt infinitesimal:

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rt} N(d_2) \quad (3.17)$$

$$p = -S_0 N(-d_1) + Ke^{-rt} N(-d_2) \quad (3.18)$$

Com:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$N(x) = \frac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \quad (\text{Distribuição Normal Padrão - 3.19})$$

A partir do modelo determinado pelas equações 3.17 e 3.18 faremos as análises das opções nesse trabalho. Utilizaremos sempre como parâmetros de comparação a volatilidade (σ) determinada pela aplicação do modelo quando ele recebe um preço de entrada.

4. APRESENTAÇÃO DA ANÁLISE

Esse trabalho tem o intuito de analisar e comparar a aderência do modelo Black-Scholes de precificação de opções em mercados líquidos e ilíquidos. Serão utilizados dados reais de operações no mercado Bovespa (Bolsa de Valores de São Paulo) e *NYSE (New York Stock Exchange)* para a comparação e análise de volatilidade contra o modelo.

4.1 OS OBJETIVOS E PREMISSAS DA ANÁLISE

Como foi discutido anteriormente o modelo de precificação de opções de Black-Scholes é utilizado pelos participantes do mercado de opções tanto para a precificação de opções líquidas como ilíquidas.

Dado que o principal objetivo é determinar se há alguma variação na aderência do modelo para esses dois diferentes mercados, foi necessário:

- 1) Selecionar opções adequadas para fazer parte da análise.
- 2) Determinar a metodologia de cálculo.
- 3) Determinar mercados líquidos e ilíquidos.
- 4) Limitar a margem de erro aceitável para o modelo.

4.2 OBSERVAÇÃO DE OPERAÇÕES DE OPÇÕES NO MERCADO

Para a coleta de dados de operações foi utilizado o sistema de operação de ações e opções, *Bloomberg™*. Ele permite acesso ao histórico de operações do mercado.

Os dados de transações são públicos para permitir a transparência do mercado e impedir a negociação de valores fora do preço de mercado, porém os atores envolvidos nas transações não são divulgados. Portanto sabe-se a que preço uma opção foi comprada, mas não se sabe quem efetuou a operação.

As conclusões tomadas a partir da análise efetuada no trabalho não devem ser extrapoladas com exatidão para ativos que não foram considerados no estudo.

4.3 VOLATILIDADE IMPLÍCITA EM UMA OPÇÃO

Como já foi mencionado no capítulo 2, a partir do preço de uma opção negociada no mercado podemos determinar a volatilidade implícita nesse preço a partir do modelo Black-Scholes (equações 3.17 e 3.18).

Utilizaremos esse método para calcular a volatilidade implícita para todas as opções analisadas. Exemplificaremos o cálculo pela opção PETRD38 negociada no dia 08 de abril de 2015 na Bovespa, evidenciada na tabela 2 e explicada pela tabela 3.

1/0	Nome	X	Data	VCTO	Du	Spot	Pré	Melhor Compra	Média	Melhor Venda
1	PETRD38	10,91	08/abr/15	20/abr/15	8	10,91	12,59%	0,44	0,45	0,45

Tabela 2 - Mercado de PETRD38 - Fonte: autor com base em dados da Bovespa

Legenda do mercado de uma opção			
1/0	Tipo da opção	1 = Compra ou	0 = Venda
Nome	Nome da opção		
X	Preço de exercício da opção		
Data	Data da observação		
VCTO	Data de vencimento da opção		
Spot	Preço da ação subjacente naquele momento		
Pré	Taxa pré-fixada considerada para o período de validade da opção		
Melhor Compra	Maior oferta de compra no mercado		
Média	Média entre a melhor compra e a melhor venda		
Melhor Venda	Menor oferta de venda no mercado		

Tabela 3 - Legenda padrão para o mercado de uma opção – Fonte: autor

No instante analisado a opção sobre ações de Petrobrás com preço de exercício R\$10,91 (X) e data de vencimento 20 de abril de 2015 (VCTO) possuía como melhor preço de compra (melhor compra) uma oferta de R\$0,44 enquanto a ação de Petrobrás valia R\$10,91 (spot). Utilizaremos a equação 3.17, por ela ser uma opção de compra, para determinar a volatilidade implícita no preço de compra dessa opção.

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rt} N(d_2) \quad (3.17)$$

Com:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Temos que: $S_0 = 10,91$; $r = 0,1259$; $t = 8/252 = 0,03175$; $K = 10,91$; $c = 0,44$

Portanto:

$$0,44 = 10,91 * N(d_1) - 10,91 * e^{-0,1259*8/252} N(d_2) \quad (3.17)$$

Com:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{10,91}{10,91}\right) + \left(0,1259 + \frac{\sigma^2}{2}\right) * 8/252}{\sigma\sqrt{8/252}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{10,91}{10,91}\right) + \left(0,1259 - \frac{\sigma^2}{2}\right) * 8/252}{\sigma\sqrt{8/252}} = d_1 - \sigma\sqrt{8/252}$$

A partir desse ponto, não é possível continuar de maneira a isolar a volatilidade (σ) para chegar ao seu valor implícito. Ao trabalhar com a solução de uma equação diferencial e distribuições normais de probabilidade, deve ser utilizado um método iterativo para se determinar qual a volatilidade (σ) que resulta em um preço $c=0,44$ (OBJETIVO) para a opção em questão.

Partindo de uma volatilidade mínima de zero ou 0% (mínima) e uma máxima de 5 ou 500% (máxima), calcula-se o preço da volatilidade média entre as duas, ou seja, $(0 + 5)/2 = 2,5$ ou 250%; caso o preço obtido a partir da volatilidade média seja maior do que o esperado, a média torna-se a nova máxima, caso seja menor, a média torna-se a nova mínima, até que a diferença entre a máxima e a mínima seja menor do que um erro admitido pelo cálculo, que consideraremos 0,0001 ou 0,01% (CHEGADA-STOP). Os resultados são mostrados na tabela 4 para a PETRD38.

PETRD38		CHEGADA		0,01%									
		OBJETIVO		0,44									
Iteração	So	K	r	T	Mínima	Máxima	Vol	D1	D2	N(D1)	N(D2)	Preço	
1	10,91	10,91	0,1259	0,032	0,0000	5,0000	2,5000	0,232	-0,214	0,592	0,415	1,9408	
2	10,91	10,91	0,1259	0,032	0,0000	2,5000	1,2500	0,129	-0,093	0,551	0,463	0,9874	
3	10,91	10,91	0,1259	0,032	0,0000	1,2500	0,6250	0,092	-0,020	0,536	0,492	0,5055	
4	10,91	10,91	0,1259	0,032	0,0000	0,6250	0,3125	0,100	0,044	0,540	0,518	0,2642	
5	10,91	10,91	0,1259	0,032	0,3125	0,6250	0,4688	0,090	0,006	0,536	0,502	0,3849	
6	10,91	10,91	0,1259	0,032	0,4688	0,6250	0,5469	0,090	-0,008	0,536	0,497	0,4452	
7	10,91	10,91	0,1259	0,032	0,4688	0,5469	0,5078	0,089	-0,001	0,536	0,500	0,4150	
8	10,91	10,91	0,1259	0,032	0,5078	0,5469	0,5273	0,090	-0,004	0,536	0,498	0,4301	
9	10,91	10,91	0,1259	0,032	0,5273	0,5469	0,5371	0,090	-0,006	0,536	0,498	0,4377	
10	10,91	10,91	0,1259	0,032	0,5371	0,5469	0,5420	0,090	-0,007	0,536	0,497	0,4414	
11	10,91	10,91	0,1259	0,032	0,5371	0,5420	0,5396	0,090	-0,006	0,536	0,497	0,4395	
12	10,91	10,91	0,1259	0,032	0,5396	0,5420	0,5408	0,090	-0,007	0,536	0,497	0,4405	
13	10,91	10,91	0,1259	0,032	0,5396	0,5408	0,5402	0,090	-0,007	0,536	0,497	0,4400	
14	10,91	10,91	0,1259	0,032	0,5396	0,5402	0,5399	0,090	-0,007	0,536	0,497	0,4398	
15	10,91	10,91	0,1259	0,032	0,5399	0,5402	0,5400	0,090	-0,007	0,536	0,497	0,4399	
16	10,91	10,91	0,1259	0,032	0,5400	0,5402	0,5401	0,090	-0,007	0,536	0,497	0,4400	
17	10,91	10,91	0,1259	0,032	0,5401	0,5402	STOP						
18	10,91	10,91	0,1259	0,032									
19	10,91	10,91	0,1259	0,032									
20	10,91	10,91	0,1259	0,032									

Tabela 4 - Modelagem Black-Scholes - PETRD38 - Fonte: Autor

A partir do modelo determinamos que a volatilidade implícita no preço de 0,44 da PETRD38 é de 54,01%.

4.4 MERCADOS LÍQUIDOS

Mercados são considerados líquidos em todos os momentos em que há preços de compra e de venda para um determinado ativo ou derivativo (TALEB, 1997). No caso uma opção, portanto para uma opção com o mesmo vencimento, preço de exercício e ativo subjacente. Na tabela 5 temos todas as empresas que possuíam opções líquidas sobre ações no mercado Bovespa no momento em que a análise foi realizada.

Essas ações são as participantes do programa de formador de mercado da Bovespa (BM&FBovespa, 2015), onde o operador que deseja participar do programa fica responsável por colocar preços de compra e venda para as opções definidas pela bolsa, da abertura ao fechamento do pregão, seguindo o regulamento da bolsa que define a quantidade mínima de opções que deve estar sempre disponível para compra ou venda e o espaçamento máximo entre os preços de compra e venda. Como o operador provê liquidez para o mercado, ele recebe incentivos de emolumentos, pagando menos pelas operações que ele efetua, as tesourarias de bancos e fundos de ações estão atualmente entre os formadores de mercado da bolsa. Na tabela 6 temos exemplificações reais de opções sobre essas ações com preços de compra e venda no mercado no dia 08 de abril de 2015.

Símbolo	Nome
ABEV3	AMBEV SA
BBAS3	BANCO DO BRASIL S.A.
BBDC4	BANCO BRADESCO SA-PREF
BRFS3	BRF SA
BVMF3	BM&FBOVESPA SA
CIEL3	CIELO SA
CSNA3	CIA SIDERURGICA NACIONAL SA
CYRE3	CYRELA BRAZIL REALTY SA EMP
GGBR4	GERDAU SA-PREF
ITUB4	ITAU UNIBANCO HOLDING S-PREF
USIM3	USINAS SIDERURGICAS DE MINAS
PETR4	PETROBRAS - PETROLEO BRAS-PR
VALE5	VALE SA-PREF

Tabela 5 - Ações com opções líquidas na Bovespa – Programa de Formador de Mercado. Fonte: BM&FBovespa

1/0	Nome	X	Data	VCTO	Du	Spot	Melhor Compra	Média	Melhor Venda
1	PETRE11	11.00	08/abr/15	18/mai/15	26	10.91	0.73	0.74	0.75
1	PETRF41	11.50	08/abr/15	15/jun/15	45	10.91	0.73	0.75	0.77
1	PETRG12	12.16	08/abr/15	20/jul/15	69	10.91	0.70	0.74	0.77
1	PETRL25	13.00	08/abr/15	21/dez/15	175	10.91	1.15	1.24	1.32
1	PETRA37	12.50	08/abr/15	18/jan/16	191	10.91	1.45	1.54	1.63
1	PETRB47	13.50	08/abr/15	15/fev/16	208	10.91	1.21	1.33	1.45
1	PETRD34	13.00	08/abr/15	18/abr/16	252	10.91	1.54	1.66	1.78
1	PETRK95	15.00	08/abr/15	21/nov/16	401	10.91	1.40	1.61	1.82
1	VALEE16	16.35	08/abr/15	18/mai/15	26	16.03	0.69	0.70	0.70
1	VALEF46	16.50	08/abr/15	15/jun/15	45	16.03	0.86	0.91	0.96
1	VALEA14	20.00	08/abr/15	18/jan/16	191	16.03	1.02	1.15	1.28
1	VALEB2	20.00	08/abr/15	15/fev/16	208	16.03	1.16	1.30	1.44
1	ITUBD13	37.92	08/abr/15	20/abr/15	8	37.77	0.56	0.58	0.59
1	ITUBE43	37.94	08/abr/15	18/mai/15	26	37.77	1.30	1.31	1.32
1	BBASE26	25.30	08/abr/15	18/mai/15	26	24.99	1.18	1.20	1.21
1	BBASF25	24.59	08/abr/15	15/jun/15	45	24.99	2.05	2.07	2.09
1	BBASL72	26.84	08/abr/15	21/dez/15	175	24.99	2.85	2.93	3.01
1	BBASC60	29.59	08/abr/15	21/mar/16	233	24.99	2.46	2.55	2.63
1	BVMFE12	12.00	08/abr/15	18/mai/15	26	12.01	0.66	0.67	0.68
1	BVMFF42	12.50	08/abr/15	15/jun/15	45	12.01	0.60	0.63	0.66
1	BVMFG12	12.00	08/abr/15	20/jul/15	69	12.01	1.03	1.07	1.11
1	BVMFL70	13.25	08/abr/15	21/dez/15	175	12.01	1.20	1.28	1.35
1	BVMFA2	12.50	08/abr/15	18/jan/16	191	12.01	1.70	1.77	1.84
1	BBDCD60	31.53	08/abr/15	20/abr/15	8	31.50	0.47	0.49	0.50
1	BBDCE39	31.95	08/abr/15	18/mai/15	26	31.50	0.72	0.86	0.99
1	BBDCF8	31.96	08/abr/15	15/jun/15	45	31.50	1.45	1.47	1.49
1	USIMD47	4.70	08/abr/15	20/abr/15	8	4.69	0.17	0.18	0.19
1	USIME48	4.80	08/abr/15	18/mai/15	26	4.69	0.27	0.28	0.29
1	CSNAD6	5.80	08/abr/15	20/abr/15	8	5.76	0.16	0.18	0.19
1	CSNAE62	5.80	08/abr/15	18/mai/15	26	5.76	0.32	0.33	0.34
1	CSNAF66	6.20	08/abr/15	15/jun/15	45	5.76	0.26	0.29	0.31
1	CYRED44	14.50	08/abr/15	20/abr/15	8	14.18	0.17	0.19	0.20
1	CYREE44	14.50	08/abr/15	18/mai/15	26	14.18	0.46	0.47	0.48
1	CIELD48	47.52	08/abr/15	20/abr/15	8	47.46	0.78	0.80	0.82
1	CIELE49	48.52	08/abr/15	18/mai/15	26	47.46	1.21	1.23	1.25
1	CIELF49	48.52	08/abr/15	15/jun/15	45	47.46	1.84	1.88	1.91
1	CIELG51	50.52	08/abr/15	20/jul/15	70	47.46	1.72	1.79	1.85
1	CIELI21	51.50	08/abr/15	21/set/15	114	47.46	2.43	2.55	2.67
1	CIELL85	55.27	08/abr/15	21/dez/15	177	47.46	2.66	2.75	2.84
1	ABEVE19	19.87	08/abr/15	18/mai/15	26	19.54	0.43	0.45	0.46
1	ABEVF51	19.62	08/abr/15	15/jun/15	45	19.54	0.79	0.82	0.84
1	ABEVG98	19.87	08/abr/15	20/jul/15	69	19.54	0.90	0.95	0.99
1	ABEVH20	19.92	08/abr/15	17/ago/15	89	19.54	1.09	1.13	1.17
1	ABEV150	20.42	08/abr/15	21/set/15	113	19.54	1.07	1.12	1.17
1	ABEVJ50	20.42	08/abr/15	19/out/15	132	19.54	1.22	1.28	1.33
1	GGBRE10	9.93	08/abr/15	18/mai/15	26	9.84	0.48	0.49	0.50
1	BRFSE66	66.18	08/abr/15	18/mai/15	26	64.96	1.80	1.83	1.85
1	BRFSF66	66.00	08/abr/15	15/jun/15	45	64.96	2.66	2.75	2.84
1	BRFSG16	68.18	08/abr/15	20/jul/15	69	64.96	2.52	2.66	2.80

Tabela 6 - Opções Líquidas encontradas na Bovespa - Fonte: autor com base em dados da Bovespa, 2015

Uma opção líquida analisada foi a opção PETRD38, que no momento da análise, no dia 8 de abril de 2015, com a ação subjacente de PETR4 valendo R\$10,91, possuía como melhor preço para compra R\$0,44 e melhor preço para venda R\$0,45. Portanto um operador poderia comprá-la a R\$0,45 ou vendê-la a R\$0,44. Traduzindo o preço de reais para volatilidade, o melhor preço de compra implica em uma volatilidade de 54,01% (como visto na seção 4.3) e o de venda em 55,47%, calculado pela mesma metodologia.

Para melhor compreensão segue a tela do mercado da opção PETRD38 (tabela 7) e uma legenda para o acompanhamento dos dados expostos na tabela 8.

1/0	Nome	X	Data	VCTO	Spot	Melhor Compra	Média	Melhor Venda	Vol Compra	Vol Média	Vol Venda	Delta
1	PETRD38	10,91	08/abr/15	20/abr/15	10,91	0,44	0,445	0,45	54,01%	54,74%	55,47%	53%

Tabela 7 - Tela de PETRD38 – Fonte: autor com base em dados da BOVESPA, 2015

Legenda do mercado de volatilidade de uma opção

Vol Compra	Volatilidade implícita calculada pelo modelo BS para o melhor preço de compra
Vol Média	Volatilidade implícita calculada pelo modelo BS para o preço médio
Vol Venda	Volatilidade implícita calculada pelo modelo BS para o melhor preço de venda
Delta	Probabilidade de exercício da opção >50% = dentro do dinheiro (vide capítulo 2)

Tabela 8 - Legenda padrão do mercado de volatilidade de uma opção - Fonte: autor

Somente como uma forma de grupo de controle, analisaremos opções no mercado internacional, mais especificamente na *NYSE*, bolsa de Nova York. Entre diversos ativos líquidos disponíveis, a tabela 9 mostra as ações que foram selecionadas por fazerem parte do cotidiano de trabalho do autor e pela sua elevada liquidez. A expectativa é de que esse grupo seja mais aderente ao modelo do que as opções brasileiras, servindo como um parâmetro de máxima para a análise.

Símbolo	Nome	Descrição
EEM	ISHARES MSCI EMERGING MARKETS	Índice de países emergentes
ESA	S&P500 EMINI FUT Jun15	Futuro sobre o Índice dos 500 maiores empresas americanas
SPY	SPDR S&P 500 ETF TRUST	Índice dos 500 maiores empresas americanas
EWZ	ISHARES MSCI BRAZIL CAPPED E	Índice Bovespa cotado em Dólares
FXI	ISHARES CHINA LARGE-CAP ETF	Índice chinês
EWY	ISHARES MSCI SOUTH KOREA CAP	Índice sul-coreano
PBR	PETROLEO BRASILEIRO-SPON ADR	PETR3 cotada em dólares

Tabela 9 - Ações e Índices selecionados que possuem opções líquidas na bolsa americana (NYSE)

Quanto mais líquido for o mercado, mais opções diferentes estarão disponíveis tanto para comprar como para vender e com vencimentos e preços de exercício diversos.

Somente para efeito comparativo no anexo pode-se verificar o mercado retirado no dia 08 de abril de 2015 tanto para opções de EEM como para opções de CSNA3, onde verifica-se que a liquidez no EEM é muito maior, evidenciada pela quantidade de diferentes vencimentos e preços de exercício disponíveis e pelo menor espaçamento entre os preços de compra e venda do mercado.

4.5 MERCADOS ILÍQUIDOS

Opções que não possuem preços de compra e venda na tela em um dado momento serão consideradas ilíquidas (TALEB, 1997). Caso uma opção não tenha tanto um preço de compra como um de venda no mercado, significa que ela não pode ser comprada ou vendida com facilidade, já que existe a necessidade de procurar uma contraparte para a operação.

Essa é a situação de diversas empresas na bolsa brasileira (BM&FBovespa). A baixa procura por opções sobre suas ações faz com que não exista em um dado momento preços tanto para sua compra quanto para sua venda. Na tabela 10 há ações em que foram observadas transações de opções ilíquidas na Bovespa no período analisado por este trabalho, entre 15 de fevereiro de 2015 e 19 de maio de 2015 e que o autor utilizou essas operações para serem analisadas nesse trabalho.

Símbolo	Nome
ABEV3	AMBEV SA
BOVA11	ISHARES IBOVESPA
BVMF3	BM&FBOVESPA SA
BRFS3	BRF SA
BRPR3	BR PROPERTIES SA
CMIG4	CIA ENERGETICA MINAS GER-PRF
GETI3	AES TIETE SA
SUZB5	SUZANO PAPEL E CELULO-PREF A
TBLE3	TRACTEBEL ENERGIA SA
UGPA3	ULTRAPAR PARTICIPACOES SA

Tabela 10 - Ações com negociações em opções ilíquidas utilizadas na análise

Podemos observar que ABEV3 e BVMF3 aparecem tanto na tabela 5, de opções líquidas como na tabela 11, de ilíquidas. Isso se deve ao fato de que, apesar de possuírem opções líquidas, com preço de compra e de venda, elas também possuem opções ilíquidas sem preço de compra e venda. É impossível que todas as opções possíveis tenham preços de mercado e, neste trabalho, foram analisadas negociações de determinadas opções de ABEV3 e de BVMF3 que não possuíam preço de compra e venda, portanto opções que foram consideradas ilíquidas.

É interessante analisar opções líquidas e ilíquidas sobre o mesmo ativo, pois a proposta da análise é mostrar se há alguma diferenciação de aderência do modelo Black-Scholes entre o mercado líquido e o ilíquido e dessa maneira pode-se descartar a hipótese de que o modelo seria mais aderente para determinados ativos do que outros, mostrando que, mesmo para o mesmo ativo, o modelo pode ser mais ou menos aderente, dependendo do tipo de opção (líquida ou ilíquida) que é analisada.

Neste estudo, houve dificuldade na coleta de dados de transações de opções ilíquidas. Apesar das informações sobre as operações serem públicas, há um número limitado de transações desse tipo na Bovespa e muitas vezes não é possível determinar o preço correto em que uma opção foi comprada ou vendida, porque devemos determinar também qual foi o preço da ação (ativo subjacente) considerada na especificação da opção, já que o preço da opção depende do preço da ação (equações 3.17 e 3.18). Muitas vezes observa-se uma transação de opções, sem saber a que preço a ação foi considerada em sua especificação e, portanto, essa transação não pode ser utilizada na análise.

Para confirmar o preço em que a opção foi precificada deve-se observar no mesmo momento do dia (normalmente com poucos minutos de diferença), a transação das opções a um determinado preço e a transação das ações correspondentes ao seu delta (para a proteção direcional do operador). Com a operação “casada” de ações e opções, pode-se determinar o preço correto da opção. Quando a quantidade de opções transacionadas é muito pequena, não é possível encontrar a transação de ações que corresponde às opções no mercado, pois ela fica perdida em meio a inúmeras outras operações sobre aquela ação. Para superar a dificuldade encontrada, foram utilizados os sistemas de base de dados de operações da bolsa (Bloomberg™) para identificar e determinar o preço de uma opção negociada contra a ação correspondente.

Todas as operações confirmadas, tanto o preço da opção quanto o da ação correspondente, durante o período de observação do trabalho foram utilizadas na análise.

4.6 DELTA DAS OPÇÕES ANALISADAS

Foram analisadas somente opções com delta entre 40% e 60%, seguindo a recomendação de Waldyr Faustini e Marcelo Gumiero, operadores do mercado financeiro. Dado que opções com deltas extremos, 0% ou 100%, sofrem distorções na precificação via volatilidade e deltas diferentes possuem preços diferentes no mercado (HAGAN,2002) (*assimetria da curva de volatilidade* – não será aprofundado no trabalho), graças à oferta e demanda por tipos diferentes de opções.

Pode-se verificar na tabela 12, que representa o mercado de opções de SPY, que opções com preços de exercício mais baixos possuem preços de volatilidade implícita maiores (VolMédia). Isso se deve ao fato de que o mercado de ações, no caso de um cenário de crise, cai acentuadamente e muito rápido. Portanto a demanda por essas opções que oferecem proteção em caso de crise é maior e os operadores as vendem mais caro, embutindo um prêmio de risco de crise (*assimetria da curva*).

Além disso, as opções com preços de exercício muito altos, pela característica dos mercados subirem mais devagar do que caem, possuem preços de volatilidade mais baixos e também probabilidade mais baixa de atingi-los, como podemos notar nos preços de exercício 213,50 e 214,50, a VolMédia é menor.

Nota-se também que as últimas duas opções da tabela, com preço de exercício 216,5 e 218 respectivamente, valem poucos centavos e apresentam volatilidade implícita (VolMédia) maiores do que as opções anteriores, os preços dessas opções ficam distorcidos devido ao seu baixo valor absoluto de mercado.

1/ 0	Nome	X	Data	VCTO	Spot	Melhor Compra	Média	Melhor Venda	Vol Compra	Vol Média	Vol Venda	Delta
1	SPY	193,50	08/abr/15	16/abr/15	207,96	14,37	14,49	14,60	11,49%	19,96%	28,42%	98%
1	SPY	199,50	08/abr/15	16/abr/15	207,96	8,46	8,55	8,63	14,89%	16,50%	18,11%	91%
1	SPY	202,50	08/abr/15	16/abr/15	207,96	5,69	5,77	5,85	14,42%	15,39%	16,37%	83%
1	SPY	205,00	08/abr/15	16/abr/15	207,96	3,61	3,69	3,77	13,72%	14,46%	15,20%	72%
1	SPY	206,50	08/abr/15	16/abr/15	207,96	2,61	2,62	2,62	13,94%	13,98%	14,02%	63%
1	SPY	208,00	08/abr/15	16/abr/15	207,96	1,64	1,65	1,66	12,92%	12,99%	13,07%	50%
1	SPY	209,50	08/abr/15	16/abr/15	207,96	0,87	0,88	0,89	11,78%	11,86%	11,95%	34%
1	SPY	210,50	08/abr/15	16/abr/15	207,96	0,51	0,52	0,52	11,15%	11,20%	11,25%	23%
1	SPY	211,50	08/abr/15	16/abr/15	207,96	0,26	0,27	0,27	10,46%	10,53%	10,60%	15%
1	SPY	212,50	08/abr/15	16/abr/15	207,96	0,12	0,13	0,13	10,01%	10,11%	10,20%	9%
1	SPY	213,50	08/abr/15	16/abr/15	207,96	0,05	0,06	0,06	9,75%	9,89%	10,04%	5%
1	SPY	214,50	08/abr/15	16/abr/15	207,96	0,03	0,04	0,04	10,16%	10,40%	10,64%	3%
1	SPY	215,50	08/abr/15	16/abr/15	207,96	0,01	0,02	0,02	9,89%	10,32%	10,76%	1%
1	SPY	216,50	08/abr/15	16/abr/15	207,96	0,01	0,02	0,02	10,95%	11,80%	12,65%	1%
1	SPY	218,00	08/abr/15	16/abr/15	207,96			0,01			14,89%	0%

Tabela 11 - Mercado de opções de SPY com vencimento abr/15 - Fonte: New York Stock Exchange

Portanto ao longo do estudo foram consideradas para análise somente opções com o delta o mais próximo o possível de 50% para eliminar esses efeitos da variação de volatilidade no delta.

4.7 VOLATILIDADE - MODELO BLACK-SCHOLES

A volatilidade utilizada como entrada no modelo de Black-Scholes será sempre a volatilidade realizada para o período considerado. O modelo foi originalmente desenhado na década de 1970 para receber a volatilidade realizada do ativo subjacente como entrada e dar ao operador o preço justo da opção em análise como saída (BLACK; SCHOLES,1973).

Portanto, para uma opção sobre PETR4 com vencimento em 8 dias úteis a volatilidade utilizada no modelo (Coluna: Realizada da tabela 12) será a volatilidade realizada de PETR4 nos últimos 8 dias úteis, calculada pela fórmula 2.6, sendo essa a volatilidade justa considerada

para essa determinada opção. Na tabela 12 temos o cálculo exemplificado, a partir dos preços de fechamento da PETR4 e retorno percentual (R), calculado pela fórmula 2.5.

	PETR4	R	R^2	REALIZADA Vol8Dias
08/04/2015	10,60	-2,70%	0,07%	47,14%
07/04/2015	10,89	1,85%	0,03%	53,05%
06/04/2015	10,69	-0,28%	0,00%	58,28%
02/04/2015	10,72	4,87%	0,24%	58,31%
01/04/2015	10,21	4,82%	0,23%	51,49%
31/03/2015	9,73	0,10%	0,00%	51,84%
30/03/2015	9,72	3,56%	0,13%	56,65%
27/03/2015	9,38	0,32%	0,00%	57,98%
26/03/2015	9,35	-5,11%	0,26%	64,29%
25/03/2015	9,84	4,68%	0,22%	#DIV/0!
24/03/2015	9,39	0,43%	0,00%	
23/03/2015	9,35	0,00%	0,00%	
20/03/2015	9,35	4,93%	0,24%	
19/03/2015	8,90	-4,07%	0,17%	
18/03/2015	9,27	4,19%	0,18%	
17/03/2015	8,89	4,96%	0,25%	
16/03/2015	8,46	#DIV/0!	#DIV/0!	

Tabela 12 - Volatilidade Realizada de 8 dias - PETR4 - Fonte: Autor

Pela tabela 12 observa-se que a volatilidade realizada de entrada para o modelo Black-Scholes para a opção PETRD38 considerada é de 47,14%. Ao analisarmos essa volatilidade contra a volatilidade implícita dessa opção no mercado, pode-se concluir que ela tem 7,68% de diferencial contra a volatilidade do mercado, valor também consideravelmente maior do que o próprio diferencial entre VolCompra e VolVenda no mercado, de somente 1,29% de volatilidade.

I/O	Nome	X	Data	Du	Spot	Pré	Vol	Melhor Compra	Média	Melhor Venda	Vol Compra	Vol Média	Vol Venda	Realizada	Dif Realizada	Dif Vol
1	PETRD38	10,91	08/04/15	8	10,91	12,59%	56,04%	0,44	0,45	0,45	54,01%	54,82%	55,47%	47,14%	7,68%	1,29%

Tabela 13 - Análise da Tela de uma opção líquida - Fonte: Autor com base em dados da Bovespa

Legenda da Tabela de Análise da Opção	
Realizada	Volatilidade realizada pelo ativo subjacente e utilizada no modelo BS
DifRealizada	Diferencial entre a volatilidade realizada pelo ativo subjacente e a implícita na opção considerada, ou diferencial de vol entre o modelo BS e a implícita na opção considerada
DifVol	Diferencial entre a VolCompra e a VolVenda

Tabela 14 - Legenda para a análise de aderência de uma opção líquida - Fonte: Autor

Para todas as opções o modelo foi aplicado como originalmente previsto, sem qualquer ajuste ou modificação de maneira que se houver alguma diferenciação entre a aderência em mercados líquidos ou ilíquidos ela será avaliada pelo diferente percentual de opções aderentes encontradas em cada tipo de mercado.

4.8 TÚNEL DE REJEIÇÃO – ADERÊNCIA DO MODELO

Para impedir negociações fora dos preços reais de mercado, a BOVESPA funciona como uma reguladora e utiliza uma técnica de túneis de rejeição de preço para determinar o valor justo de derivativos operados e qual a margem de diferença que eles podem ser transacionados.

Essa técnica consiste na definição do intervalo de preço aceitável para fins de negociação (BOVESPA, 2001) e determina os limites de oscilação diários no sistema eletrônico de negociação da bolsa. O túnel de preço impede que qualquer transação de uma opção seja efetuada com uma diferença de $\pm 20\%$ do último negócio. Os túneis de rejeição foram um aprimoramento dos limites de oscilação intradiária e são definidos no Ofício Circular 054/2001. Eles são acionados na iminência de se fechar um negócio, fazendo com que a transação seja recusada pelo sistema caso o preço da operação não pertença ao intervalo de preços definido pelo túnel, como é mostrado na figura 10. Assim, é criada uma banda de negociação onde o derivativo pode ser negociado, entre os limites de rejeição de compra e venda.

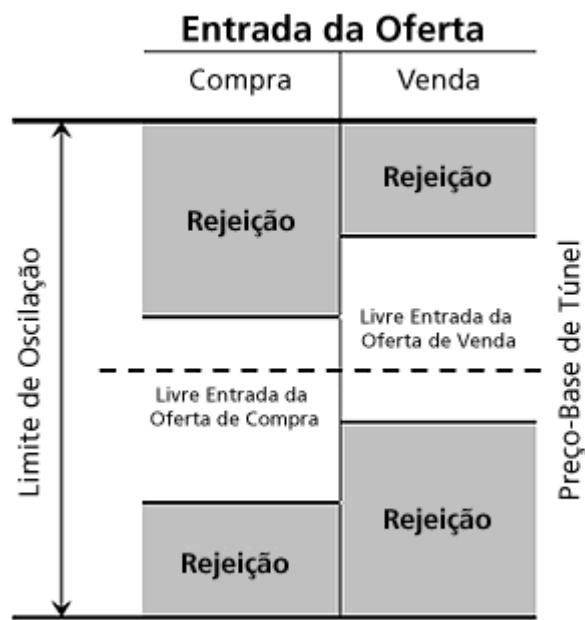


Figura 25 - Túnel de Rejeição - Fonte: BOVESPA

Como as opções são negociadas em inúmeros preços de exercício e vencimentos diferentes e seus preços também dependem dos preços das ações subjacentes, o preço de volatilidade implícita em uma opção negociada serve para a definição de seu túnel de rejeição.

Os preços para opções consideradas foram retirados do preço de negociação do mercado. As volatilidades implícitas calculadas pelo modelo Black-Scholes sobre os preços do mercado foram utilizadas para a formação do túnel de preço. Em seguida o preço justo obtido para essa opção, calculado a partir da volatilidade realizada do ativo subjacente, pelo modelo Black-Scholes foi testado para verificar se o modelo seria ou não rejeitado pelo sistema de operações do mercado.

De maneira que, se o preço do modelo estiver fora do intervalo de compra e venda definido pelo túnel de preço, o modelo foi considerado não aderente para a precificação daquela opção. Caso contrário, o preço definido pelo modelo estiver entre o preço de compra e de venda definido pelo túnel, a opção será considerada aderente, como mostrado na figura 26.

$$\text{Túnel de Preço} = [0,8 * \text{VolMédia}, \text{VolMédia} * 1,2] \quad (4.1)$$

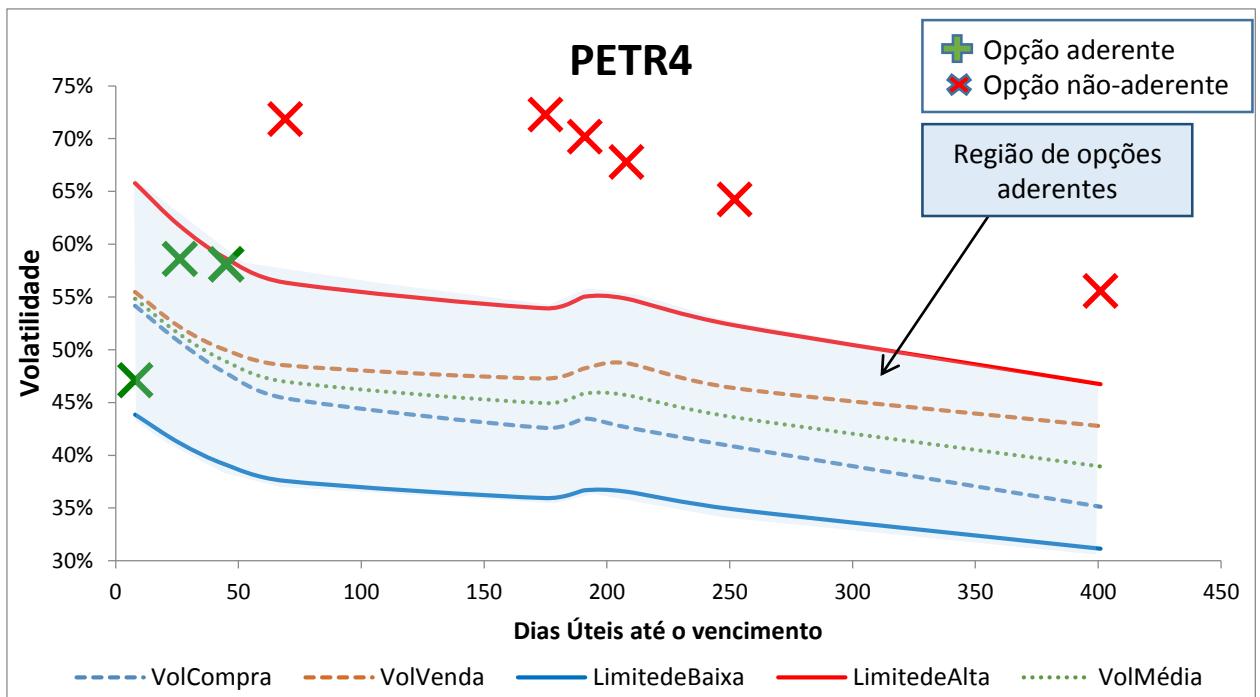


Figura 26 - Exemplo de túnel de preço - Fonte: Autor com dados Bovespa, 2015

A partir dos túneis verifica-se se o preço obtido no modelo de Black-Scholes pertence a eles ou não, sendo as opções classificadas respectivamente como aderentes ou não-aderentes ao modelo.

5. ANÁLISE DE ADERÊNCIA DO MODELO DE BLACK-SCHOLES EM OPÇÕES NEGOCIADAS NO MERCADO

A partir das regras da bolsa e das premissas discutidas no capítulo 4 foi realizada a análise com diversas opções negociadas no mercado.

Para se chegar à volatilidade implícita de uma opção foi necessário calculá-la pelo método iterativo visto na seção 4.3 e a volatilidade realizada pelo método clássico, como visto na seção 4.7.

As opções foram precificadas pelo modelo de maneira que pôde ser verificado se elas seriam aceitas pelos parâmetros de negociação da bolsa. O modelo foi considerado aderente quando a volatilidade do modelo pertence ao túnel de negociação e, em caso contrário, ela foi considerada não aderente, pois não poderia ser negociada no preço determinado pelo modelo.

Temos a seguir o resultado das análises, tanto para opções líquidas e ilíquidas na Bovespa e no grupo de controle de opções negociadas nos Estados Unidos, mais líquidas do que as brasileiras.

5.1 RESULTADOS GERAIS

No anexo, nos apêndices C, D e E há a discriminação dos resultados por opção analisada. Na tabela 15 há o resumo da análise com o percentual de opções aderentes encontradas e a diferença média obtida para cada grupo entre a volatilidade do modelo Black-Scholes e a volatilidade implícita nas opções negociadas no mercado (DifRealizada).

	Ilíquido (1)		Líquido (2)		EUA (controle)	
Aderência	%	Qtde	%	Qtde	%	Qtde
SIM	19,35%	6	46,55%	54	71,58%	68
NÃO	80,65%	25	53,45%	62	28,42%	27
Total	100,00%	31	100,00%	116	100,00%	95
DifRealizada Média	-9,07%		-6,91%			

Tabela 15 - Resultados da análise de aderência do modelo Black-Scholes. Fonte: autor

Nota-se que o modelo se comportou como esperado, aumentando a sua aderência ao mercado conforme o aumento de liquidez. Foi encontrado um diferencial de volatilidade realizada de 2,16% entre o mercado ilíquido (amostra 1) e o líquido (amostra 2) na Bovespa. A

partir desses dados foi realizado um teste de hipótese (COSTA NETO, 1977) para determinar se há diferença entre as duas amostras consideradas.

Para o teste (D), têm-se duas populações, com a hipótese zero (H_0) de que elas sejam iguais, com:

$$DifRealizada \text{ Média Líquido} = 9,07 = \mu_1 = \mu_2 = 6,91 = Dif Realizada \text{ Média}$$

$$\text{Ilíquido}$$

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \rightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

$$E(D) = E(\bar{X} - \bar{Y}) = E(\bar{X}) - E(\bar{Y}) = \mu_1 - \mu_2$$

$$Var(D) = Var(\bar{X} - \bar{Y}) = Var(\bar{X}) + Var(\bar{Y}) - 2Cov(\bar{X}, \bar{Y})$$

Mas, $Cov(\bar{X}, \bar{Y}) = 0$, pois as negociações das opções são independentes.

$$\text{Portanto, } Var(D) = Var(\bar{X}) + Var(\bar{Y}) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

E, a 10% de significância, com $P = 0,10/2$ sendo a probabilidade da hipótese, Z a distribuição normal, temos que:

$$P(\{Z < -c\} \cup \{Z > c\}) = 0,05 \leftrightarrow c = 1,645$$

A região crítica do teste é dada por:

$$|\bar{X} - \bar{Y}| > c * \sqrt{Var(D)}$$

Chegamos aos resultados da tabela 16:

	Teste de Hipótese	Líquido BZ	Ilíquido BZ
Média	2,16	-6,91	-9,07
DesvioPadrão		9,53	5,27
N Amostras		116	31
Var(D)	1,68		
DesvioPad(D)	1,30		
C (10%)	1,645		
MédiaTeste (c*Var(D)^0.5)	2,13		

Tabela 15 - Teste de hipótese – Totalidade da Base- Fonte: autor

Como a média do teste é menor do que a diferença entre as médias das duas populações a hipótese zero (H_0) é rejeitada, portanto rejeita-se a hipótese de que as duas populações são iguais na análise.

Nas figuras 27 e 28 pode-se ver a plotagem em um gráfico do resultado da análise que foi efetuada. O espaço azul claro, entre a linha continua vermelha e a azul escura, é o túnel de preço calculado e cada “X” uma opção que foi negociada. Em ambos os mercados as opções negociadas estão geralmente abaixo do preço precificado pelo modelo Black-Scholes, mostrando que os operadores exigem desconto sobre o preço teórico para negociar as opções.

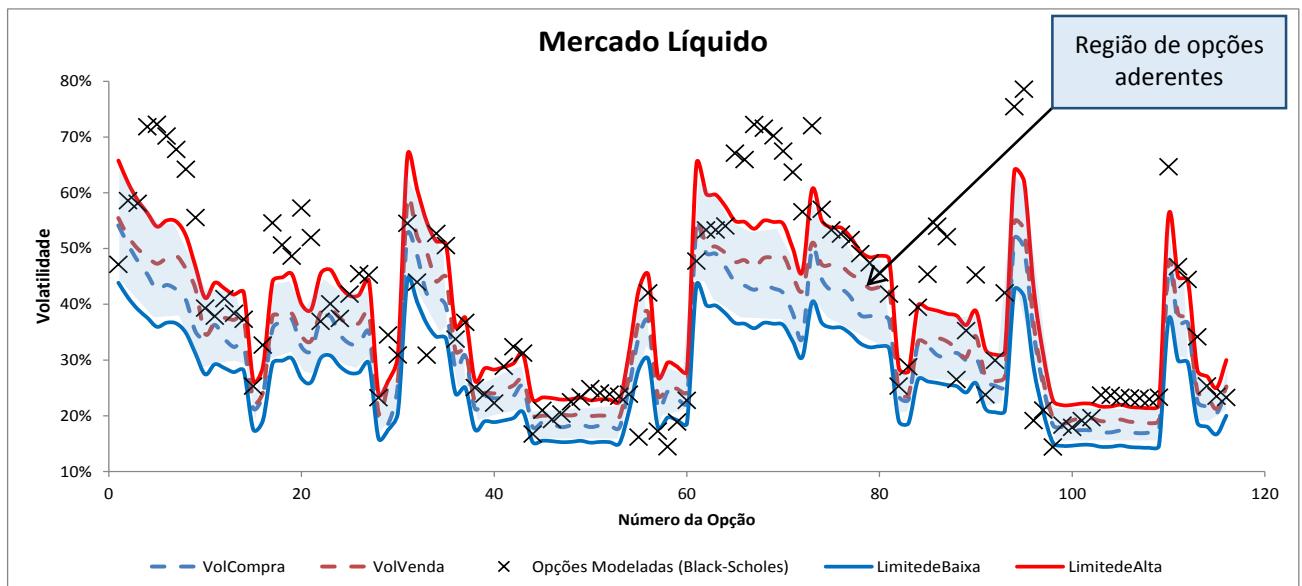


Figura 27- Plotagem da análise das opções líquidas - Fonte: autor

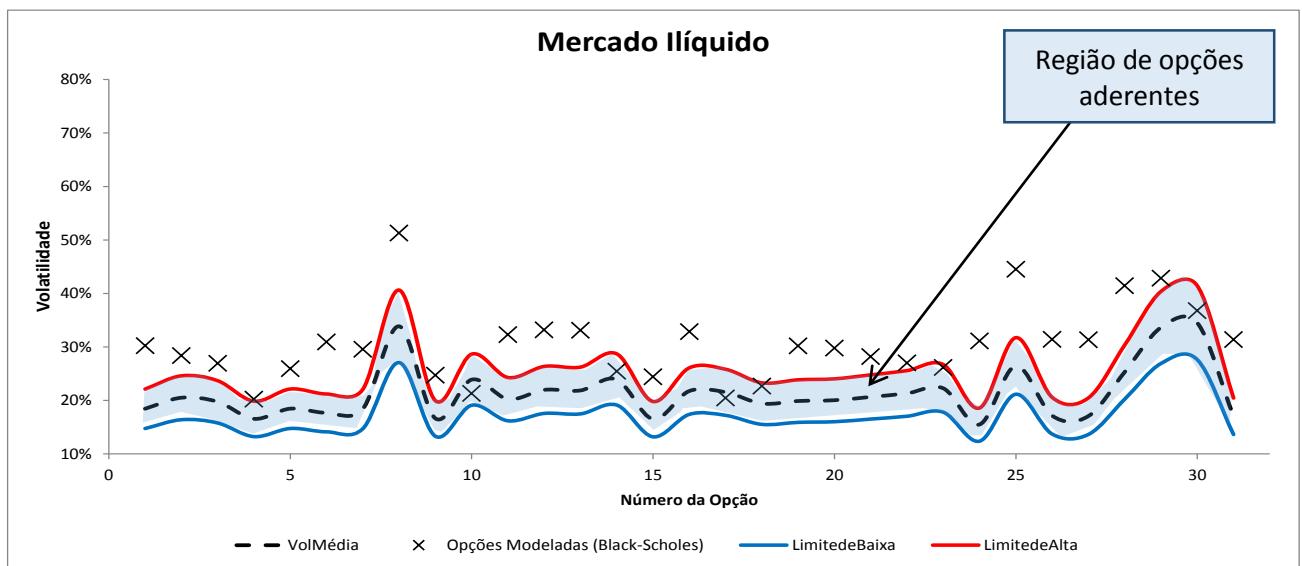


Figura 28 - Plotagem da análise das opções ilíquidas - Fonte: autor

5.2 RESULTADOS COM EXCLUSÃO DA PETROBRÁS

Considerando agora a hipótese de que a Petrobrás, por estar passando por um momento turbulento devido às investigações da operação Lava-Jato, em curso durante a realização desse trabalho, poderia determinar uma mudança no resultado da análise, a análise foi refeita desconsiderando-se este ativo.

Portanto, nas tabelas 16 e 17 são apresentados os resultados do estudo com a exclusão de todas as opções de Petrobrás que foram consideradas anteriormente.

	Ilíquido (exPetr)	Líquido (exPetr)	EUA (controle)			
Aderência	%	Qtde	%	Qtde	%	Qtde
SIM	19,35%	6	49,47%	47	71,58%	68
NÃO	80,65%	25	50,53%	48	28,42%	27
Total	100,00%	31	100,00%	95	100,00%	95
DifRealizada Média	-9,07%		-4,93%			
DesvioPadrão(DifRealizada)	5,27%		8,00%			

Tabela 16 - Resultado da análise de aderência do modelo Black-Scholes - ExPetr. Fonte: autor

	Teste de Hipótese	Líquido (exPetr)	Ilíquido (exPetr)
Média	4,14	-4,93	-9,07
DesvioPadrão		8,00	5,27
N Amostras		95	31
Var(D)	1,57		
DesvioPad(D)	1,25		
C (1%)	2,575		
MédiaTeste	3,23		
Resultado	Líquido BZ ≠ Ilíquido BZ		

Tabela 17 - Teste de hipótese - ExPetr - Fonte: autor

Nota-se que a exclusão da Petrobrás da análise não afeta duramente os resultados, que continuaram mostrando maior aderência no mercado líquido do que no ilíquido. Vale ressaltar que, com a nova base utilizada, foi possível determinar a diferença das duas amostras com uma significância de 1% no teste de hipótese, reforçando a diferenciação entre os dois mercados considerados.

6. CONCLUSÃO

A volatilidade é um risco que não pode ser observado diretamente no mercado e por isso se torna mais complexo e perigoso do que riscos primários, como o risco de delta. Vimos que há dificuldade em se mensurar o risco de uma posição de volatilidade e já houve instituições financeiras que foram levadas à falência pela má gestão de um portfólio de volatilidade.

Ainda, em menor evidência do que a volatilidade, o risco de liquidez de um mercado é muitas vezes ignorado ou não mensurado pelos operadores. Há dificuldade em se quantificar o risco de liquidez na precificação de operações e não há uma técnica exata para fazê-lo.

A precificação de uma operação de opções no mercado Bovespa deve levar em conta ambos os riscos discutidos, porém o modelo Black-Scholes não diferencia ativos pelos seus níveis de liquidez, precificando-os sem distinção.

Nesse capítulo avaliam-se os principais resultados e conclusões obtidos a partir dos estudos e análises deste projeto, além das dificuldades apresentadas ao longo de sua realização e de sugestões para a complementação dos estudos.

Para comparar a aderência do modelo Black-Scholes aos diferentes mercados foi necessário transformar o preço negociado das opções de ações em volatilidade implícita pelo modelo e determinar o túnel de preço para que a operação seja aceita na Bovespa. Foram utilizados os cálculos de volatilidade realizada pelo modelo clássico e dados de opções obtidos nos sistemas da bolsa.

Para isso, as opções analisadas foram divididas em dois grupos: as opções líquidas e as ilíquidas, e também comparadas com um grupo de controle de opções mais líquidas negociadas nos Estados Unidos.

O estudo comprovou queda da aderência do modelo Black-Scholes diretamente proporcional à queda da liquidez do mercado. A amostra de opções ilíquidas foi a que teve o menor porcentual de opções aderentes ao modelo (somente 19,35%) e no maior diferencial entre o preço obtido no modelo e o negociado no mercado, as opções foram negociadas a 9,07% em média abaixo do preço teórico do modelo Black-Scholes.

O nível extremamente fraco de aderência no mercado ilíquido demonstra que a opção vale menos do que o modelo a especifica devido ao risco de liquidez embutido naquela operação,

o que faz com que um operador não esteja disposto a pagar o mesmo que ele pagaria em uma opção líquida.

Esse desconto entre o mercado líquido e ilíquido leva a uma diferença de milhões de reais negociados no mercado todos os dias, devido ao alto volume médio diário de opções negociadas na Bovespa, o que incorreria em grande prejuízo para operadores que tentassem utilizar o modelo Black-Scholes como determinante para compra e venda de opções ilíquidas.

Dado que o trabalho se originou de um assunto muito específico: problemas na negociação e precificação de volatilidade em ativos ilíquidos, o que levou a dificuldades durante a sua realização. Os temas tratados não eram de conhecimento prévio do aluno, o que levou a uma extensa pesquisa para a compreensão do mercado de volatilidade, seu funcionamento e finalmente a precificação de opções e os fatores e riscos envolvidos.

Na pesquisa bibliográfica não foram encontrados trabalhos que estudassem o impacto da liquidez na precificação de opções. O tema é discutido informalmente no mercado financeiro, porém durante a pesquisa não foram identificados estudos que desenvolvessem um modelo que quantificasse esse risco com exatidão. Devido à falta de material sobre o caso, o autor recorreu ao regulamento da Bovespa para executar a comparação entre as opções líquidas e ilíquidas.

A obtenção de dados de opções ilíquidas corretos para as análises foi um desafio. Foram coletados dados de todas as opções ilíquidas negociadas no mercado Bovespa entre 15 de fevereiro e 19 de maio de 2015 a que o autor teve acesso. A coleta só foi possível graças ao acesso a sistemas de bolsa e de operações na instituição onde o programa de *trainee* foi realizado.

Entretanto, o trabalho apresentado não esgota todas as alternativas de estudo nem todas as dificuldades de se realizar operações com opções em mercados ilíquidos. Há possibilidades de melhoria do estudo proposto ou de novas abordagens e metodologias para serem aplicadas no futuro.

Uma sugestão seria uma coleta mais extensa de dados de operações ilíquidas e a utilização de outros modelos de precificação de opções, como o modelo binomial (Hull, 2007), para a análise da aderência, podendo ser comparados ao estudo realizado nesse trabalho.

A inclusão do diferencial de volatilidade entre os diferentes deltas de opções ou do modelo SABR (HAGAN, 2002) que considera o *Smile* da volatilidade também seria

interessante, pois possibilitaria a inclusão e comparação de opções de diferentes deltas na análise e a visualização da aderência do modelo a uma quantidade maior de opções negociadas.

Deve-se considerar a possibilidade de medir mais precisamente o impacto da liquidez na precificação de uma opção e também a possibilidade de arbitragem de volatilidade entre os dois tipos de mercados.

Durante a realização da pesquisa houve uma mudança de expectativa em relação ao que seria determinado. A primeira hipótese do trabalho propunha que o modelo seria aderente ao mercado líquido, mas não ao ilíquido, o que não pode ser comprovado, pois a aderência só pode ser testada quando premissas são assumidas, tornando-a um parâmetro somente comparativo e não determinador para o modelo. A segunda hipótese, de que o modelo seria menos aderente para o mercado ilíquido foi comprovada com sucesso.

O trabalho possibilitou a comparação da utilização do modelo Black-Scholes de precificação de opções tanto para mercados líquidos como ilíquidos. O diferencial de volatilidade na precificação de ativos ilíquidos mostra a relevância e a consideração e cuidado que os operadores do mercado têm ao precificar esse tipo de opção.

De acordo com a análise, o diferencial de prêmio de risco de liquidez médio entre um mercado líquido e um ilíquido foi de 2,3% de volatilidade no período analisado.

Por fim, é possível concluir que o risco de liquidez torna o modelo Black-Scholes inviável para a operacionalização de opções ilíquidas sem que seja considerado um prêmio de risco maior para a execução dessas opções.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BLACK, F; SCHOLES, M.** **The Pricing of Options and Corporate Liabilities.** Journal of Political Economy, 1973, 637–654p.
- BLOOMBERG** (2015). **Preços de ações e opções.** Buscas de 02 de fevereiro de 2015 a 26 de maio de 2015 no servidor de dados Bloomberg.
- BLOOMBERG** (2015). **Volatilidades realizadas de ações.** Buscas de 02 de fevereiro de 2015 a 26 de maio de 2015 no servidor de dados Bloomberg.
- BM&FBOVESPA.** **Bolsa de Valores Mercadorias e Futuros:** Disponível em: <<http://www.bmfbovespa.com.br>>. Acesso em: 12 de abril de 2015
- COHEN, G.,** **The Bible of Options Strategies, the Definitive Guide for Practical Trading Strategies,** 1st ed. Prentice Hall, 2005. 401p.
- CONNOLLY, K. B.,** **Buying and Selling Volatility,** Wiley, 1997. 230p.
- COSTA NETO, P. L. de O.** **Estatística.** São Paulo, Editora Edgard Blucher, 1977.
- DERMAN, Emanuel,** **The Volatility Smile and Its Implied Tree,** 1994, 139-145p.
- HAGAN, P. et al,** **Managing Smile Risk,** Wilmott magazine, 2002. 84-108p.
- HULL, J.,** **Options, Futures and Other Derivatives,** 8th ed. Prentice Hall, 2011. 841p.
- ITÔ, K.** **On Stochastic Differential Equations.** Memoirs of the American Mathematical Society, v.4, pp. 1-51, 1951.
- MERCADOS DE DERIVATIVOS BOVESPA.** **Bmf&Bovespa.** Disponível em: <<http://www.bmfbovespa.com.br/pt-br/regulacao/regulamentos-e-normas/procedimentos-operacionais>>. Acesso em: 12 de abril de 2015
- REGULAMENTOS BOVESPA.** **Bmf&Bovespa .** Disponível em: <<http://www.bmfbovespa.com.br/pt-br/regulacao/regulamentos-e-normas/procedimentos-operacionais>>. Acesso em: 12 de abril de 2015
- TALEB, N.,** **Dynamic Hedging, Managing Vanilla and Exotic Options.** John Wiley & Sons, 1997. 515p

THETA DECAIMENT. **Quantopia.** Disponível em: <<http://www.quantopia.net/wp-content/uploads/2013/03/EuroCallRates.png>>. Acesso em 4 de março de 2015

ANEXO

APÊNDICE A - MERCADO DE OPÇÕES DE EEM (RETIRADO EM 08/04/2015 – FONTE: AUTOR COM BASE EM DADOS DA NEW YORK STOCK EXCHANGE)

0	EEM	33.00	19/jun/15	25.76%	0.04	0.06	0.07	28.43%	30.79%	33.15%
1	EEM	33.50	19/jun/15	25.64%	8.90	8.95	9.00	18.31%	24.36%	30.42%
0	EEM	35.00	19/jun/15	25.10%	0.10	0.12	0.13	26.45%	27.38%	28.31%
1	EEM	35.50	19/jun/15	24.83%	6.95	7.03	7.10	20.65%	24.51%	28.38%
0	EEM	36.50	19/jun/15	24.15%	0.16	0.18	0.19	24.11%	24.67%	25.23%
1	EEM	37.00	19/jun/15	23.72%	5.55	5.63	5.70	21.15%	23.56%	25.98%
0	EEM	37.50	19/jun/15	23.23%	0.24	0.25	0.26	23.18%	23.47%	23.75%
1	EEM	38.00	19/jun/15	22.69%	4.65	4.70	4.75	20.86%	22.11%	23.36%
0	EEM	38.50	19/jun/15	22.07%	0.34	0.35	0.36	21.93%	22.15%	22.37%
1	EEM	39.00	19/jun/15	21.41%	3.75	3.83	3.90	19.53%	21.05%	22.56%
1	EEM	39.50	19/jun/15	20.69%	3.35	3.40	3.45	19.49%	20.41%	21.33%
0	EEM	39.50	19/jun/15	20.69%	0.49	0.51	0.52	20.84%	21.11%	21.39%
1	EEM	40.00	19/jun/15	19.95%	2.94	3.00	3.05	18.95%	19.88%	20.80%
0	EEM	40.00	19/jun/15	19.95%	0.59	0.60	0.61	20.36%	20.53%	20.70%
1	EEM	40.50	19/jun/15	19.24%	2.56	2.61	2.66	18.61%	19.39%	20.17%
0	EEM	40.50	19/jun/15	19.24%	0.71	0.72	0.73	19.92%	20.08%	20.23%
1	EEM	41.00	19/jun/15	18.60%	2.21	2.26	2.30	18.39%	19.05%	19.70%
0	EEM	41.00	19/jun/15	18.60%	0.84	0.86	0.87	19.33%	19.55%	19.77%
1	EEM	41.50	19/jun/15	18.05%	1.88	1.92	1.96	18.10%	18.65%	19.20%
0	EEM	41.50	19/jun/15	18.05%	0.98	1.01	1.03	18.58%	18.93%	19.27%
1	EEM	42.00	19/jun/15	17.59%	1.58	1.60	1.62	17.85%	18.12%	18.38%
0	EEM	42.00	19/jun/15	17.59%	1.18	1.20	1.22	18.33%	18.59%	18.86%
1	EEM	42.50	19/jun/15	17.19%	1.30	1.32	1.34	17.49%	17.76%	18.02%
0	EEM	42.50	19/jun/15	17.19%	1.40	1.42	1.44	17.97%	18.23%	18.49%
0	EEM	43.00	19/jun/15	16.78%	1.63	1.66	1.69	17.36%	17.76%	18.15%
1	EEM	43.50	19/jun/15	16.37%	0.84	0.85	0.86	16.92%	17.06%	17.19%
0	EEM	44.00	19/jun/15	15.99%	2.23	2.26	2.29	16.81%	17.25%	17.69%
1	EEM	44.50	19/jun/15	15.65%	0.48	0.51	0.53	16.04%	16.44%	16.85%
0	EEM	45.00	19/jun/15	15.35%	2.93	2.99	3.05	16.02%	17.12%	18.21%
0	EEM	30.50	17/jul/15	28.15%	0.04	0.07	0.09	29.77%	33.26%	36.75%
1	EEM	32.50	17/jul/15	27.53%	9.85	9.95	10.05	40.84%	47.12%	53.40%
0	EEM	33.50	17/jul/15	27.02%	0.11	0.14	0.16	26.37%	27.52%	28.66%
1	EEM	35.00	17/jul/15	25.95%	7.45	7.53	7.60	31.28%	33.59%	35.89%
0	EEM	35.00	17/jul/15	25.95%	0.19	0.22	0.24	25.14%	25.90%	26.67%
1	EEM	36.50	17/jul/15	24.46%	6.00	6.10	6.20	26.55%	28.78%	31.01%
0	EEM	36.50	17/jul/15	24.46%	0.31	0.34	0.36	23.68%	24.24%	24.79%
1	EEM	37.50	17/jul/15	23.21%	5.10	5.20	5.30	24.79%	26.66%	28.53%
0	EEM	37.50	17/jul/15	23.21%	0.42	0.45	0.47	22.60%	23.07%	23.53%
1	EEM	38.50	17/jul/15	21.79%	4.25	4.33	4.40	23.44%	24.64%	25.84%
0	EEM	38.50	17/jul/15	21.79%	0.56	0.59	0.61	21.43%	21.83%	22.22%
1	EEM	39.50	17/jul/15	20.30%	3.40	3.48	3.55	21.51%	22.56%	23.60%
0	EEM	39.50	17/jul/15	20.30%	0.76	0.79	0.82	20.47%	20.88%	21.30%
1	EEM	40.00	17/jul/15	19.62%	3.00	3.08	3.15	20.67%	21.66%	22.64%
0	EEM	40.00	17/jul/15	19.62%	0.88	0.92	0.95	19.96%	20.41%	20.87%
1	EEM	40.50	17/jul/15	19.00%	2.67	2.72	2.77	20.53%	21.15%	21.77%
1	EEM	41.00	17/jul/15	18.48%	2.32	2.38	2.43	19.90%	20.56%	21.21%
0	EEM	41.00	17/jul/15	18.48%	1.18	1.22	1.25	19.02%	19.44%	19.86%
1	EEM	41.50	17/jul/15	18.05%	2.00	2.04	2.08	19.40%	19.86%	20.32%
0	EEM	41.50	17/jul/15	18.05%	1.37	1.41	1.44	18.67%	19.07%	19.48%
1	EEM	42.00	17/jul/15	17.68%	1.70	1.74	1.78	18.88%	19.33%	19.79%
1	EEM	42.50	17/jul/15	17.30%	1.41	1.45	1.48	18.21%	18.61%	19.01%
0	EEM	42.50	17/jul/15	17.30%	1.81	1.86	1.90	17.85%	18.36%	18.87%
1	EEM	43.50	17/jul/15	16.50%	0.94	0.97	1.00	17.28%	17.64%	18.00%

0	EEM	43.50	17/jul/15	16.50%	2.35	2.41	2.46	17.02%	17.68%	18.34%
1	EEM	44.50	17/jul/15	15.70%	0.58	0.61	0.64	16.41%	16.83%	17.24%
0	EEM	44.50	17/jul/15	15.70%	3.00	3.08	3.15	16.27%	17.31%	18.35%
1	EEM	45.50	17/jul/15	14.99%	0.33	0.36	0.39	15.68%	16.21%	16.75%
0	EEM	29.00	18/set/15	29.51%	0.09	0.12	0.15	30.10%	31.98%	33.86%
1	EEM	31.00	18/set/15	28.70%	11.35	11.45	11.55	32.44%	36.09%	39.74%
0	EEM	32.00	18/set/15	28.14%	0.20	0.23	0.26	27.35%	28.23%	29.10%
1	EEM	34.00	18/set/15	26.66%	8.50	8.60	8.70	27.23%	29.25%	31.26%
0	EEM	34.00	18/set/15	26.66%	0.34	0.37	0.40	25.75%	26.35%	26.96%
1	EEM	35.50	18/set/15	25.22%	7.10	7.20	7.30	24.78%	26.38%	27.99%
0	EEM	35.50	18/set/15	25.22%	0.49	0.52	0.54	24.44%	24.84%	25.24%
1	EEM	36.50	18/set/15	24.10%	6.20	6.30	6.40	23.40%	24.81%	26.22%
0	EEM	37.00	18/set/15	23.50%	0.69	0.71	0.73	23.04%	23.30%	23.57%
1	EEM	37.50	18/set/15	22.89%	5.35	5.43	5.50	22.39%	23.33%	24.27%
0	EEM	38.00	18/set/15	22.25%	0.87	0.90	0.92	22.20%	22.49%	22.79%
1	EEM	38.50	18/set/15	21.63%	4.50	4.60	4.70	21.00%	22.12%	23.25%
0	EEM	39.00	18/set/15	21.02%	1.08	1.11	1.14	21.25%	21.57%	21.89%
1	EEM	39.50	18/set/15	20.46%	3.75	3.83	3.90	20.28%	21.05%	21.81%
0	EEM	40.00	18/set/15	19.96%	1.34	1.38	1.42	20.34%	20.73%	21.12%
1	EEM	40.50	18/set/15	19.51%	3.05	3.13	3.20	19.52%	20.23%	20.94%
0	EEM	41.00	18/set/15	19.13%	1.67	1.72	1.76	19.57%	19.98%	20.39%
1	EEM	41.50	18/set/15	18.81%	2.40	2.46	2.52	18.65%	19.19%	19.73%
0	EEM	42.00	18/set/15	18.52%	2.07	2.12	2.17	18.84%	19.28%	19.73%
1	EEM	42.50	18/set/15	18.23%	1.84	1.88	1.91	17.95%	18.26%	18.57%
0	EEM	43.00	18/set/15	17.93%	2.54	2.60	2.66	18.09%	18.63%	19.16%
1	EEM	43.50	18/set/15	17.63%	1.35	1.40	1.44	17.20%	17.60%	18.01%
0	EEM	44.00	18/set/15	17.32%	3.10	3.18	3.25	17.46%	18.16%	18.86%
1	EEM	44.50	18/set/15	17.01%	0.95	1.00	1.04	16.51%	16.95%	17.39%
0	EEM	45.00	18/set/15	16.70%	3.75	3.85	3.95	16.95%	17.98%	19.00%
1	EEM	46.00	18/set/15	16.09%	0.52	0.56	0.59	15.70%	16.12%	16.53%
0	EEM	46.50	18/set/15	15.81%	4.85	4.95	5.05	16.04%	17.35%	18.65%
0	EEM	27.00	18/dez/15	30.69%	0.15	0.20	0.24	30.65%	32.41%	34.18%
1	EEM	30.00	18/dez/15	29.24%	12.45	12.55	12.65	34.86%	37.04%	39.22%
0	EEM	31.00	18/dez/15	28.59%	0.37	0.42	0.46	27.63%	28.47%	29.31%
1	EEM	32.50	18/dez/15	27.44%	10.10	10.20	10.30	30.00%	31.52%	33.04%
0	EEM	33.50	18/dez/15	26.55%	0.61	0.65	0.69	25.67%	26.20%	26.74%
1	EEM	34.50	18/dez/15	25.59%	8.25	8.38	8.50	26.56%	28.06%	29.57%
0	EEM	35.50	18/dez/15	24.54%	0.88	0.92	0.95	24.00%	24.38%	24.76%
1	EEM	36.00	18/dez/15	24.00%	6.95	7.08	7.20	24.71%	26.01%	27.31%
0	EEM	37.00	18/dez/15	22.88%	1.14	1.18	1.21	22.69%	23.02%	23.35%
1	EEM	37.50	18/dez/15	22.33%	5.75	5.85	5.95	23.38%	24.29%	25.20%
1	EEM	38.50	18/dez/15	21.29%	5.00	5.10	5.20	22.58%	23.42%	24.26%
0	EEM	38.50	18/dez/15	21.29%	1.48	1.53	1.57	21.48%	21.85%	22.23%
1	EEM	39.50	18/dez/15	20.41%	4.25	4.35	4.45	21.48%	22.27%	23.06%
0	EEM	39.50	18/dez/15	20.41%	1.75	1.80	1.85	20.64%	21.03%	21.43%
1	EEM	40.50	18/dez/15	19.72%	3.60	3.68	3.75	20.84%	21.40%	21.96%
0	EEM	40.50	18/dez/15	19.72%	2.07	2.13	2.18	19.85%	20.26%	20.67%
1	EEM	41.50	18/dez/15	19.20%	3.00	3.08	3.15	20.21%	20.75%	21.30%
0	EEM	41.50	18/dez/15	19.20%	2.45	2.51	2.57	19.13%	19.57%	20.00%
1	EEM	42.50	18/dez/15	18.75%	2.43	2.48	2.53	19.41%	19.77%	20.13%
0	EEM	42.50	18/dez/15	18.75%	2.89	2.97	3.05	18.45%	19.02%	19.60%
1	EEM	43.50	18/dez/15	18.28%	1.95	2.01	2.06	18.85%	19.26%	19.66%

0	EEM	43.50	18/dez/15	18.28%	3.40	3.48	3.55	17.83%	18.38%	18.93%
1	EEM	44.50	18/dez/15	17.80%	1.52	1.58	1.63	18.23%	18.65%	19.07%
0	EEM	44.50	18/dez/15	17.80%	3.95	4.05	4.15	17.05%	17.81%	18.57%
1	EEM	45.50	18/dez/15	17.30%	1.16	1.22	1.27	17.69%	18.13%	18.58%
0	EEM	45.50	18/dez/15	17.30%	4.60	4.68	4.75	16.53%	17.14%	17.75%
1	EEM	47.00	18/dez/15	16.50%	0.74	0.78	0.82	16.97%	17.36%	17.74%
0	EEM	47.00	18/dez/15	16.50%	5.65	5.75	5.85	15.38%	16.34%	17.31%
0	EEM	48.50	18/dez/15	15.73%	6.85	6.95	7.05	14.31%	15.55%	16.80%
1	EEM	49.00	18/dez/15	15.50%	0.36	0.40	0.43	16.02%	16.50%	16.99%
0	EEM	25.00	15/jan/16	31.44%	0.12	0.17	0.22	32.18%	34.75%	37.32%
0	EEM	29.00	15/jan/16	29.79%	0.32	0.37	0.42	29.64%	30.75%	31.87%
1	EEM	30.00	15/jan/16	29.18%	12.40	12.53	12.65	32.87%	35.25%	37.64%
0	EEM	32.00	15/jan/16	27.72%	0.56	0.61	0.66	27.15%	27.88%	28.61%
1	EEM	33.00	15/jan/16	26.86%	9.60	9.73	9.85	27.83%	29.45%	31.07%
0	EEM	34.00	15/jan/16	25.92%	0.80	0.83	0.86	25.57%	25.91%	26.26%
1	EEM	35.00	15/jan/16	24.91%	7.85	7.98	8.10	25.55%	26.87%	28.19%
0	EEM	36.00	15/jan/16	23.84%	1.13	1.19	1.24	24.04%	24.57%	25.11%
1	EEM	37.00	15/jan/16	22.75%	6.15	6.28	6.40	23.08%	24.20%	25.31%
1	EEM	38.00	15/jan/16	21.71%	5.40	5.45	5.50	22.41%	22.82%	23.23%
0	EEM	38.00	15/jan/16	21.71%	1.58	1.64	1.69	22.60%	23.06%	23.51%
1	EEM	39.00	15/jan/16	20.80%	4.65	4.75	4.85	21.45%	22.22%	22.99%
0	EEM	39.00	15/jan/16	20.80%	1.90	1.94	1.97	22.22%	22.49%	22.75%
1	EEM	40.00	15/jan/16	20.06%	3.95	4.05	4.15	20.59%	21.32%	22.05%
0	EEM	40.00	15/jan/16	20.06%	2.19	2.25	2.31	21.28%	21.72%	22.16%
1	EEM	41.00	15/jan/16	19.51%	3.30	3.40	3.50	19.78%	20.48%	21.18%
0	EEM	41.00	15/jan/16	19.51%	2.55	2.62	2.68	20.55%	21.01%	21.46%
1	EEM	42.00	15/jan/16	19.06%	2.75	2.80	2.84	19.32%	19.63%	19.94%
0	EEM	42.00	15/jan/16	19.06%	3.05	3.10	3.15	20.46%	20.80%	21.15%
1	EEM	43.00	15/jan/16	18.63%	2.23	2.30	2.37	18.69%	19.17%	19.66%
0	EEM	43.00	15/jan/16	18.63%	3.55	3.60	3.65	20.01%	20.35%	20.70%
1	EEM	44.00	15/jan/16	18.19%	1.77	1.84	1.90	18.09%	18.55%	19.01%
1	EEM	45.00	15/jan/16	17.72%	1.38	1.42	1.45	17.57%	17.83%	18.09%
0	EEM	45.00	15/jan/16	17.72%	4.60	4.73	4.85	18.32%	19.25%	20.17%
1	EEM	47.00	15/jan/16	16.71%	0.76	0.82	0.87	16.43%	16.92%	17.41%
0	EEM	47.00	15/jan/16	16.71%	6.00	6.13	6.25	17.61%	18.72%	19.83%
1	EEM	49.00	15/jan/16	15.67%	0.37	0.42	0.46	15.45%	16.00%	16.55%
0	EEM	49.00	15/jan/16	15.67%	7.65	7.78	7.90	17.70%	19.23%	20.76%
0	EEM	30.00	18/mar/16	28.90%	0.55	0.61	0.66	28.68%	29.50%	30.33%
1	EEM	30.50	18/mar/16	28.54%	12.05	12.15	12.25	31.00%	32.41%	33.82%
0	EEM	32.50	18/mar/16	26.92%	0.83	0.88	0.93	26.77%	27.34%	27.91%
1	EEM	33.00	18/mar/16	26.47%	9.75	9.88	10.00	27.21%	28.56%	29.91%
0	EEM	34.50	18/mar/16	25.04%	1.12	1.18	1.23	25.15%	25.67%	26.19%
1	EEM	35.00	18/mar/16	24.54%	8.00	8.13	8.25	24.79%	25.93%	27.06%
0	EEM	36.00	18/mar/16	23.51%	1.41	1.47	1.52	24.09%	24.55%	25.01%
1	EEM	36.50	18/mar/16	23.00%	6.80	6.93	7.05	23.58%	24.59%	25.60%
0	EEM	37.50	18/mar/16	22.01%	1.75	1.82	1.88	22.96%	23.45%	23.94%
1	EEM	38.00	18/mar/16	21.55%	5.65	5.75	5.85	22.30%	23.03%	23.76%
1	EEM	39.00	18/mar/16	20.74%	4.90	5.03	5.15	21.31%	22.17%	23.03%
0	EEM	39.00	18/mar/16	20.74%	2.17	2.25	2.32	21.91%	22.42%	22.94%
1	EEM	40.00	18/mar/16	20.09%	4.20	4.33	4.45	20.43%	21.25%	22.07%
0	EEM	40.00	18/mar/16	20.09%	2.50	2.58	2.65	21.24%	21.73%	22.22%
1	EEM	41.00	18/mar/16	19.59%	3.60	3.73	3.85	19.93%	20.73%	21.52%

0	EEM	41.00	18/mar/16	19.59%	2.90	2.98	3.05	20.76%	21.24%	21.71%
1	EEM	42.00	18/mar/16	19.19%	3.05	3.15	3.25	19.46%	20.09%	20.71%
0	EEM	42.00	18/mar/16	19.19%	3.30	3.40	3.50	20.01%	20.63%	21.25%
1	EEM	43.00	18/mar/16	18.80%	2.54	2.62	2.70	18.95%	19.44%	19.94%
0	EEM	43.00	18/mar/16	18.80%	3.80	3.90	4.00	19.59%	20.22%	20.84%
1	EEM	44.00	18/mar/16	18.42%	2.02	2.13	2.23	18.05%	18.71%	19.38%
0	EEM	44.50	18/mar/16	18.22%	4.65	4.75	4.85	19.03%	19.68%	20.32%
1	EEM	45.50	18/mar/16	17.80%	1.43	1.53	1.62	17.27%	17.91%	18.55%
0	EEM	46.00	18/mar/16	17.58%	5.60	5.70	5.80	18.43%	19.13%	19.82%
1	EEM	47.00	18/mar/16	17.10%	0.98	1.06	1.14	16.66%	17.26%	17.87%
0	EEM	47.50	18/mar/16	16.84%	6.65	6.78	6.90	17.80%	18.79%	19.78%
1	EEM	49.00	18/mar/16	16.03%	0.55	0.62	0.68	15.90%	16.53%	17.16%
0	EEM	49.50	18/mar/16	15.77%	8.25	8.38	8.50	17.49%	18.80%	20.12%
0	EEM	20.00	20/jan/17	32.63%	0.20	0.35	0.50	32.55%	37.14%	41.74%
1	EEM	26.00	20/jan/17	30.27%	16.45	16.63	16.80	24.63%	26.81%	28.99%
0	EEM	26.00	20/jan/17	30.27%	0.73	0.96	1.18	30.75%	33.56%	36.37%
1	EEM	29.00	20/jan/17	28.49%	13.65	13.85	14.05	22.19%	24.05%	25.92%
0	EEM	30.00	20/jan/17	27.81%	1.26	1.48	1.69	28.47%	30.31%	32.16%
1	EEM	32.00	20/jan/17	26.34%	11.05	11.23	11.40	20.70%	21.99%	23.28%
0	EEM	33.00	20/jan/17	25.55%	1.84	2.00	2.15	27.03%	28.10%	29.17%
1	EEM	34.00	20/jan/17	24.75%	9.45	9.63	9.80	20.03%	21.16%	22.30%
0	EEM	35.00	20/jan/17	23.93%	2.32	2.49	2.65	26.09%	27.09%	28.10%
1	EEM	36.00	20/jan/17	23.12%	7.90	8.10	8.30	19.13%	20.28%	21.44%
0	EEM	37.00	20/jan/17	22.35%	2.91	3.11	3.30	25.29%	26.36%	27.42%
1	EEM	38.00	20/jan/17	21.65%	6.50	6.70	6.90	18.52%	19.57%	20.61%
0	EEM	39.00	20/jan/17	21.03%	3.60	3.80	4.00	24.50%	25.50%	26.50%
1	EEM	40.00	20/jan/17	20.50%	5.25	5.45	5.65	18.04%	19.01%	19.98%
0	EEM	41.00	20/jan/17	20.07%	4.40	4.60	4.80	23.75%	24.69%	25.63%
1	EEM	42.00	20/jan/17	19.72%	4.25	4.40	4.55	18.07%	18.76%	19.45%
0	EEM	43.00	20/jan/17	19.42%	5.40	5.58	5.75	23.44%	24.23%	25.03%
1	EEM	44.00	20/jan/17	19.14%	3.15	3.35	3.55	16.95%	17.86%	18.76%
0	EEM	45.00	20/jan/17	18.88%	6.55	6.73	6.90	23.33%	24.12%	24.92%
1	EEM	46.00	20/jan/17	18.62%	2.35	2.54	2.73	16.52%	17.40%	18.27%
1	EEM	48.00	20/jan/17	18.10%	1.68	1.88	2.07	16.02%	16.96%	17.91%
0	EEM	48.00	20/jan/17	18.10%	8.50	8.68	8.85	23.39%	24.24%	25.09%
1	EEM	50.00	20/jan/17	17.51%	1.13	1.35	1.56	15.40%	16.55%	17.69%
0	EEM	51.00	20/jan/17	17.17%	10.65	10.85	11.05	23.66%	24.80%	25.93%
1	EEM	55.00	20/jan/17	15.68%	0.36	0.53	0.70	14.29%	15.73%	17.17%

**APÊNDICE B - MERCADO DE OPÇÕES DE CSNA3 (RETIRADO EM
08/04/2015 – FONTE: AUTOR COM BASE EM DADOS BM&FBOVESPA)**

1/0	Nome	X	VCTO	Vol	Melhor Compra	Média	Melhor Venda	Vol Compra	Vol Média	Vol Venda
0	CSNAP56	5.40	20/abr/15	52.23%	0.07	0.09	0.10	51.84%	56.77%	61.70%
1	CSNAD56	5.40	20/abr/15	52.23%	0.42	0.44	0.45	43.95%	48.88%	53.81%
0	CSNAP58	5.60	20/abr/15	50.44%	0.13	0.15	0.16	51.09%	55.04%	59.00%
1	CSNAD58	5.60	20/abr/15	50.44%	0.28	0.29	0.30	44.56%	47.20%	49.83%
0	CSNAP6	5.80	20/abr/15	50.25%	0.22	0.24	0.25	50.65%	54.32%	57.99%
1	CSNAD6	5.80	20/abr/15	50.25%	0.16	0.18	0.19	41.97%	45.64%	49.30%
1	CSNAD62	6.00	20/abr/15	50.50%	0.08	0.10	0.11	40.72%	44.66%	48.60%
0	CSNAQ54	5.00	18/mai/15	52.60%	0.09	0.10	0.11	52.92%	55.14%	57.36%
0	CSNAQ56	5.20	18/mai/15	50.93%	0.14	0.15	0.16	53.36%	55.20%	57.04%
1	CSNAE56	5.20	18/mai/15	50.93%	0.66	0.69	0.72	34.28%	39.80%	45.32%
0	CSNAQ58	5.40	18/mai/15	49.47%	0.20	0.21	0.22	52.90%	54.49%	56.08%
1	CSNAE58	5.40	18/mai/15	49.47%	0.54	0.56	0.57	39.22%	41.60%	43.98%
0	CSNAQ6	5.60	18/mai/15	48.59%	0.27	0.29	0.30	51.66%	53.81%	55.96%
1	CSNAE6	5.60	18/mai/15	48.59%	0.42	0.44	0.45	40.38%	42.53%	44.69%
1	CSNAE62	5.80	18/mai/15	48.24%	0.32	0.33	0.34	41.35%	42.72%	44.08%
1	CSNAE64	6.00	18/mai/15	48.11%	0.23	0.25	0.26	40.92%	42.97%	45.01%
1	CSNAE66	6.20	18/mai/15	48.11%	0.17	0.18	0.19	42.08%	43.51%	44.93%
1	CSNAF6	5.60	15/jun/15	46.73%	0.51	0.54	0.57	37.32%	40.60%	43.89%
1	CSNAF66	6.20	15/jun/15	46.15%	0.26	0.29	0.31	39.68%	42.29%	44.91%
1	CSNAG5	4.80	20/jul/15	49.47%	1.12	1.17	1.22	29.76%	36.37%	42.98%
1	CSNAC80	5.00	21/mar/16	43.24%	1.35	1.48	1.61	24.52%	32.79%	41.05%

**APÊNDICE C – ANÁLISE DE ADERÊNCIA DO MODELO BLACK-SCHOLES –
GRUPO LÍQUIDO**

1/0	Nome	X	Data	Du	Spot	Pré	Melhor Compra	Média	Melhor Venda	Vol Compra	Vol Média	Vol Venda	Realizada	Dif Realizada	DifVol	Aderente
1	PETRD38	10.91	08/abr/15	8	10.91	12.59%	0.44	0.45	0.45	54.18%	54.82%	55.47%	47.14%	7.68%	1.29%	SIM
1	PETRE11	11.00	08/abr/15	26	10.91	12.70%	0.73	0.74	0.75	50.76%	51.48%	52.20%	58.61%	-7.13%	1.44%	SIM
1	PETRF41	11.50	08/abr/15	45	10.91	12.89%	0.73	0.75	0.77	47.79%	48.88%	49.97%	58.11%	-9.22%	2.18%	SIM
1	PETRG12	12.16	08/abr/15	69	10.91	13.03%	0.70	0.74	0.77	45.41%	46.97%	48.53%	71.85%	-24.87%	3.12%	NÃO
1	PETRL25	13.00	08/abr/15	175	10.91	13.22%	1.15	1.24	1.32	42.59%	44.94%	47.28%	72.28%	-27.34%	4.69%	NÃO
1	PETRA37	12.50	08/abr/15	191	10.91	13.25%	1.45	1.54	1.63	43.48%	45.86%	48.25%	70.17%	-24.31%	4.77%	NÃO
1	PETRB47	13.50	08/abr/15	208	10.91	13.31%	1.21	1.33	1.45	42.66%	45.70%	48.74%	67.77%	-22.07%	6.08%	NÃO
1	PETRD34	13.00	08/abr/15	252	10.91	13.24%	1.54	1.66	1.78	40.82%	43.60%	46.37%	64.24%	-20.64%	5.55%	NÃO
1	PETRK95	15.00	08/abr/15	401	10.91	13.05%	1.40	1.61	1.82	35.11%	38.94%	42.78%	55.56%	-16.62%	7.66%	NÃO
1	VALED16	16.35	08/abr/15	8	16.03	12.59%	0.27	0.28	0.28	33.83%	34.27%	34.72%	39.33%	-5.05%	0.90%	SIM
1	VALEE16	16.35	08/abr/15	26	16.03	12.70%	0.69	0.70	0.70	36.31%	36.56%	36.80%	37.88%	-1.32%	0.49%	SIM
1	VALEF46	16.50	08/abr/15	45	16.03	12.89%	0.86	0.91	0.96	33.84%	35.69%	37.54%	41.03%	-5.33%	3.70%	SIM
1	VALEA14	20.00	08/abr/15	191	16.03	13.25%	1.02	1.15	1.28	32.33%	34.76%	37.19%	38.38%	-3.62%	4.85%	SIM
1	VALEB2	20.00	08/abr/15	208	16.03	13.31%	1.16	1.30	1.44	32.66%	35.14%	37.61%	37.31%	-2.17%	4.95%	SIM
1	ITUBD13	37.92	08/abr/15	8	37.77	12.59%	0.56	0.58	0.59	21.33%	21.89%	22.45%	25.31%	-3.42%	1.12%	SIM
1	ITUBE43	37.94	08/abr/15	26	37.77	12.70%	1.30	1.31	1.32	23.79%	24.00%	24.20%	32.70%	-8.70%	0.42%	NÃO
1	BBASD55	25.02	08/abr/15	8	24.99	12.59%	0.66	0.68	0.70	35.61%	36.74%	37.87%	54.60%	-17.86%	2.26%	NÃO
1	BBASE26	25.30	08/abr/15	26	24.99	12.70%	1.18	1.20	1.21	36.87%	37.34%	37.81%	50.65%	-13.31%	0.94%	NÃO
1	BBASF25	24.59	08/abr/15	45	24.99	12.89%	2.05	2.07	2.09	37.35%	37.85%	38.35%	48.65%	-10.80%	1.00%	NÃO
1	BBASL72	26.84	08/abr/15	175	24.99	13.22%	2.85	2.93	3.01	32.37%	33.36%	34.34%	57.26%	-23.90%	1.97%	NÃO
1	BBASC60	29.59	08/abr/15	233	24.99	13.23%	2.46	2.55	2.63	31.65%	32.53%	33.42%	51.96%	-19.43%	1.77%	NÃO
1	BVMFD12	11.90	08/abr/15	8	12.01	12.59%	0.40	0.41	0.41	37.34%	37.94%	38.54%	36.93%	1.01%	1.20%	SIM
1	BVMFE12	12.00	08/abr/15	26	12.01	12.70%	0.66	0.67	0.68	37.83%	38.49%	39.15%	40.10%	-1.61%	1.32%	SIM
1	BVMFF42	12.50	08/abr/15	45	12.01	12.89%	0.60	0.63	0.66	34.56%	36.04%	37.53%	37.47%	-1.43%	2.97%	SIM
1	BVMFG12	12.00	08/abr/15	69	12.01	13.03%	1.03	1.07	1.11	32.96%	34.61%	36.27%	41.84%	-7.23%	3.31%	NÃO
1	BVMLFL70	13.25	08/abr/15	175	12.01	13.22%	1.20	1.28	1.35	32.85%	34.74%	36.64%	45.49%	-10.75%	3.79%	NÃO
1	BVMAFA2	12.50	08/abr/15	191	12.01	13.25%	1.70	1.77	1.84	35.02%	36.80%	38.57%	45.23%	-8.43%	3.54%	NÃO
1	BBDCD60	31.53	08/abr/15	8	31.50	12.59%	0.47	0.49	0.50	19.22%	19.89%	20.56%	23.25%	-3.36%	1.34%	SIM
1	BBDCCE39	31.95	08/abr/15	26	31.50	12.70%	0.72	0.86	0.99	18.54%	21.88%	25.23%	34.50%	-12.62%	6.69%	NÃO
1	BBDCF8	31.96	08/abr/15	45	31.50	12.89%	1.45	1.47	1.49	25.24%	25.61%	25.99%	30.89%	-5.28%	0.76%	NÃO
1	USIMD47	4.70	08/abr/15	8	4.69	12.59%	0.17	0.18	0.19	52.51%	55.53%	58.54%	54.52%	1.00%	6.03%	SIM
1	USIME48	4.80	08/abr/15	26	4.69	12.70%	0.27	0.28	0.29	48.84%	50.51%	52.17%	43.98%	6.53%	3.33%	SIM
1	CSNAD6	5.80	08/abr/15	8	5.76	12.59%	0.16	0.18	0.19	41.97%	45.64%	49.30%	30.88%	14.76%	7.34%	NÃO

1	CSNAE62	5.80	08/abr/15	26	5.76	12.70%	0.32	0.33	0.34	41.35%	42.72%	44.08%	52.71%	-9.99%	2.73%	NÃO
1	CSNAF66	6.20	08/abr/15	45	5.76	12.89%	0.26	0.29	0.31	39.68%	42.29%	44.91%	50.52%	-8.23%	5.22%	SIM
1	CYRED44	14.50	08/abr/15	8	14.18	12.59%	0.17	0.19	0.20	28.36%	29.93%	31.50%	33.75%	-3.82%	3.14%	SIM
1	CYREE44	14.50	08/abr/15	26	14.18	12.70%	0.46	0.47	0.48	30.77%	31.33%	31.88%	36.75%	-5.42%	1.11%	SIM
1	CIELD48	47.52	08/abr/15	8	47.46	12.59%	0.78	0.80	0.82	21.35%	21.94%	22.54%	25.05%	-3.11%	1.19%	SIM
1	CIELE49	48.52	08/abr/15	26	47.46	12.70%	1.21	1.23	1.25	23.41%	23.74%	24.08%	23.91%	-0.17%	0.66%	SIM
1	CIELF49	48.52	08/abr/15	45	47.46	12.89%	1.84	1.88	1.91	23.13%	23.57%	24.01%	22.30%	1.27%	0.88%	SIM
1	CIELG51	50.52	08/abr/15	70	47.46	13.03%	1.72	1.79	1.85	23.29%	23.95%	24.61%	28.88%	-4.93%	1.32%	NÃO
1	CIELI21	51.50	08/abr/15	114	47.46	13.17%	2.43	2.55	2.67	23.54%	24.49%	25.43%	32.37%	-7.89%	1.89%	NÃO
1	CIELL85	55.27	08/abr/15	177	47.46	13.21%	2.66	2.75	2.84	25.25%	25.84%	26.42%	31.26%	-5.42%	1.17%	NÃO
1	ABEVD72	19.74	08/abr/15	8	19.54	12.59%	0.19	0.21	0.22	17.98%	19.08%	20.18%	16.73%	2.35%	2.19%	SIM
1	ABEVE19	19.87	08/abr/15	26	19.54	12.70%	0.43	0.45	0.46	18.81%	19.41%	20.01%	20.99%	-1.58%	1.20%	SIM
1	ABEVF51	19.62	08/abr/15	45	19.54	12.89%	0.79	0.82	0.84	18.53%	19.31%	20.09%	19.34%	-0.03%	1.57%	SIM
1	ABEVG98	19.87	08/abr/15	69	19.54	13.03%	0.90	0.95	0.99	17.95%	19.08%	20.21%	20.33%	-1.25%	2.26%	SIM
1	ABEVH20	19.92	08/abr/15	89	19.54	13.11%	1.09	1.13	1.17	18.26%	19.16%	20.05%	22.49%	-3.34%	1.79%	SIM
1	ABEVJ50	20.42	08/abr/15	113	19.54	13.16%	1.07	1.12	1.17	18.41%	19.38%	20.35%	23.34%	-3.96%	1.94%	NÃO
1	ABEVJ50	20.42	08/abr/15	132	19.54	13.25%	1.22	1.28	1.33	17.97%	18.97%	19.97%	24.86%	-5.89%	2.00%	NÃO
1	ABEVA21	21.17	08/abr/15	191	19.54	13.25%	1.37	1.43	1.49	18.24%	19.14%	20.03%	24.09%	-4.95%	1.79%	NÃO
1	ABEVB22	22.09	08/abr/15	208	19.54	13.31%	1.12	1.18	1.24	18.24%	19.09%	19.94%	23.90%	-4.80%	1.70%	NÃO
1	ABEVC52	22.42	08/abr/15	233	19.54	13.23%	1.14	1.21	1.28	17.85%	18.79%	19.72%	23.53%	-4.74%	1.87%	NÃO
1	ABEVD92	23.17	08/abr/15	252	19.54	13.24%	1.57	1.65	1.72	25.14%	26.12%	27.10%	23.89%	2.23%	1.95%	SIM
1	GGBRD10	9.89	08/abr/15	8	9.84	12.59%	0.23	0.24	0.25	34.00%	35.43%	36.86%	16.18%	19.25%	2.86%	NÃO
1	GGBRE10	9.93	08/abr/15	26	9.84	12.70%	0.48	0.49	0.50	36.88%	37.67%	38.47%	42.07%	-4.39%	1.59%	SIM
1	BRFSD15	65.18	08/abr/15	8	64.96	12.59%	0.99	1.04	1.09	21.40%	22.48%	23.57%	17.25%	5.24%	2.17%	NÃO
1	BRFSE66	66.18	08/abr/15	26	64.96	12.70%	1.80	1.83	1.85	24.32%	24.62%	24.92%	14.45%	10.17%	0.60%	NÃO
1	BRFSF66	66.00	08/abr/15	45	64.96	12.89%	2.66	2.75	2.84	23.19%	24.01%	24.84%	18.90%	5.12%	1.65%	NÃO
1	BRFSG16	68.18	08/abr/15	69	64.96	13.03%	2.52	2.66	2.80	22.19%	23.22%	24.25%	22.75%	0.47%	2.06%	SIM
1	PETRF44	14.50	13/mai/15	22	13.98	13.22%	0.73	0.74	0.74	53.98%	54.29%	54.59%	47.75%	6.54%	0.61%	SIM
1	PETRG44	14.66	13/mai/15	46	13.98	13.45%	1.02	1.04	1.05	49.22%	49.85%	50.48%	53.33%	-3.48%	1.26%	SIM
1	PETRG15	15.16	13/mai/15	46	13.98	13.45%	0.83	0.85	0.86	49.07%	49.71%	50.34%	53.33%	-3.63%	1.27%	SIM
1	PETRH44	14.50	13/mai/15	66	13.98	13.53%	1.31	1.35	1.38	46.73%	47.96%	49.20%	54.05%	-6.08%	2.47%	SIM
1	PETRJ16	16.00	13/mai/15	109	13.98	13.72%	1.16	1.23	1.29	44.01%	45.80%	47.59%	67.12%	-21.32%	3.57%	NÃO
1	PETRK16	16.00	13/mai/15	128	13.98	13.75%	1.32	1.41	1.50	43.37%	45.64%	47.91%	65.97%	-20.33%	4.54%	NÃO
1	PETRL44	17.00	13/mai/15	152	13.98	13.80%	1.20	1.29	1.37	42.61%	44.62%	46.62%	72.27%	-27.65%	4.01%	NÃO
1	PETRA6	13.75	13/mai/15	168	13.98	13.81%	2.63	2.73	2.83	43.39%	45.85%	48.30%	71.60%	-25.76%	4.90%	NÃO
1	PETRB47	13.50	13/mai/15	185	13.98	13.80%	2.88	3.00	3.11	42.84%	45.63%	48.41%	70.23%	-24.60%	5.57%	NÃO
1	PETRC81	11.75	13/mai/15	210	13.98	13.81%	4.05	4.17	4.28	42.01%	45.36%	48.72%	67.48%	-22.12%	6.71%	NÃO
1	PETRE58	18.25	13/mai/15	248	13.98	13.78%	1.37	1.55	1.73	38.36%	41.68%	44.99%	63.71%	-22.04%	6.63%	NÃO

1	PETRK95	15.00	13/mai/15	378	13.98	13.61%	3.06	3.32	3.57	33.99%	38.21%	42.42%	56.58%	-18.38%	8.43%	NÃO
1	VALEF19	18.49	13/mai/15	22	18.18	13.22%	1.02	1.03	1.04	50.03%	50.50%	50.96%	72.04%	-21.54%	0.93%	NÃO
1	VALEG19	18.60	13/mai/15	46	18.18	13.45%	1.38	1.42	1.46	44.55%	45.85%	47.14%	57.06%	-11.21%	2.60%	NÃO
1	VALEH69	18.85	13/mai/15	66	18.18	13.53%	1.55	1.64	1.72	42.50%	44.80%	47.10%	53.34%	-8.54%	4.60%	SIM
1	VALEI49	18.10	13/mai/15	90	18.18	13.65%	2.28	2.37	2.45	42.71%	44.78%	46.85%	52.58%	-7.80%	4.13%	SIM
1	VALEJ19	18.49	13/mai/15	109	18.18	13.72%	2.29	2.39	2.48	41.27%	43.34%	45.41%	51.59%	-8.25%	4.14%	SIM
1	VALEL20	19.60	13/mai/15	152	18.18	13.80%	2.16	2.34	2.51	38.09%	41.24%	44.38%	49.08%	-7.85%	6.29%	SIM
1	VALEA22	21.49	13/mai/15	168	18.18	13.81%	1.64	1.79	1.93	37.88%	40.35%	42.82%	47.41%	-7.05%	4.94%	SIM
1	VALEB72	21.49	13/mai/15	185	18.18	13.80%	1.82	1.98	2.13	38.06%	40.56%	43.07%	45.63%	-5.07%	5.01%	SIM
1	VALED57	19.99	13/mai/15	229	18.18	13.79%	2.73	2.93	3.13	37.09%	40.07%	43.04%	41.84%	-1.77%	5.95%	SIM
1	ITUBF83	38.00	13/mai/15	22	37.62	13.22%	1.06	1.07	1.08	23.58%	23.81%	24.03%	25.33%	-1.53%	0.45%	SIM
1	ITUBG39	39.36	13/mai/15	46	37.62	13.45%	1.10	1.13	1.15	22.90%	23.29%	23.69%	28.79%	-5.50%	0.79%	NÃO
1	BBASF28	27.59	13/mai/15	22	27.03	13.22%	0.93	0.94	0.94	33.00%	33.16%	33.31%	39.47%	-6.31%	0.31%	SIM
1	BBASG8	27.87	13/mai/15	46	27.03	13.45%	1.40	1.41	1.42	32.47%	32.69%	32.91%	45.40%	-12.71%	0.43%	NÃO
1	BBASC60	29.59	13/mai/15	210	27.03	13.81%	3.24	3.39	3.53	30.87%	32.37%	33.87%	54.00%	-21.63%	3.00%	NÃO
1	BBASD10	30.43	13/mai/15	229	27.03	13.79%	3.11	3.26	3.40	30.49%	31.91%	33.33%	52.11%	-20.20%	2.84%	NÃO
1	BVMFF42	12.40	13/mai/15	22	12.12	13.22%	0.38	0.39	0.39	31.28%	31.63%	31.98%	26.49%	5.14%	0.70%	SIM
1	BVMFG42	12.40	13/mai/15	46	12.12	13.45%	0.62	0.63	0.63	29.98%	30.22%	30.46%	35.27%	-5.05%	0.49%	SIM
1	BVMFA2	12.40	13/mai/15	168	12.12	13.81%	1.52	1.59	1.66	30.45%	32.35%	34.26%	45.26%	-12.90%	3.81%	NÃO
1	BBDCF38	31.11	13/mai/15	22	30.91	13.22%	1.01	1.02	1.03	26.28%	26.55%	26.83%	23.76%	2.79%	0.55%	SIM
1	BBDCG5	33.00	13/mai/15	46	30.91	13.45%	0.80	0.82	0.84	25.40%	25.81%	26.21%	29.96%	-4.16%	0.81%	SIM
1	BBDDCK68	31.59	13/mai/15	128	30.91	13.75%	2.89	2.97	3.04	25.21%	26.12%	27.02%	42.05%	-15.93%	1.80%	NÃO
1	USIMF58	5.77	13/mai/15	22	5.73	13.22%	0.36	0.37	0.38	51.79%	53.28%	54.77%	75.44%	-22.16%	2.98%	NÃO
1	CSNAF82	8.20	13/mai/15	22	8.02	13.22%	0.42	0.44	0.45	50.14%	51.74%	53.33%	78.59%	-26.85%	3.19%	NÃO
1	CYREF12	11.59	13/mai/15	22	11.30	13.22%	0.33	0.34	0.35	34.92%	35.70%	36.48%	19.15%	16.55%	1.55%	NÃO
1	CIELF51	42.10	13/mai/15	22	41.87	13.22%	1.36	1.39	1.41	25.29%	25.80%	26.31%	21.03%	4.77%	1.02%	SIM
1	ABEVF51	19.62	13/mai/15	22	19.41	13.22%	0.42	0.44	0.45	18.33%	18.98%	19.64%	14.39%	4.59%	1.31%	NÃO
1	ABEVG98	19.87	13/mai/15	46	19.41	13.45%	0.59	0.60	0.61	17.95%	18.25%	18.55%	18.34%	-0.09%	0.60%	SIM
1	ABEVH20	19.92	13/mai/15	66	19.41	13.53%	0.76	0.80	0.83	17.41%	18.30%	19.19%	17.91%	0.38%	1.78%	SIM
1	ABEVI50	20.42	13/mai/15	90	19.41	13.65%	0.76	0.81	0.86	17.42%	18.50%	19.58%	19.13%	-0.63%	2.16%	SIM
1	ABEVJ50	20.42	13/mai/15	109	19.41	13.72%	0.93	0.99	1.04	17.37%	18.45%	19.54%	19.65%	-1.19%	2.17%	SIM
1	ABEVL2	21.23	13/mai/15	152	19.41	13.80%	0.92	0.98	1.04	17.04%	18.04%	19.03%	23.73%	-5.69%	2.00%	NÃO
1	ABEVA21	21.17	13/mai/15	168	19.41	13.81%	1.07	1.14	1.20	17.02%	18.05%	19.08%	23.65%	-5.60%	2.06%	NÃO
1	ABEVB22	22.09	13/mai/15	185	19.41	13.80%	0.86	0.93	0.99	17.33%	18.32%	19.32%	23.33%	-5.01%	1.99%	NÃO
1	ABEVC52	22.42	13/mai/15	210	19.41	13.81%	0.90	0.97	1.03	17.05%	17.98%	18.92%	23.22%	-5.24%	1.87%	NÃO
1	ABEVD92	21.67	13/mai/15	229	19.41	13.79%	1.31	1.39	1.46	16.86%	17.89%	18.91%	23.17%	-5.28%	2.05%	NÃO
1	ABEVE62	22.17	13/mai/15	248	19.41	13.78%	1.25	1.32	1.38	16.98%	17.82%	18.67%	22.99%	-5.17%	1.69%	NÃO
1	ABEVF72	21.92	13/mai/15	272	19.41	13.78%	1.55	1.63	1.71	17.24%	18.25%	19.26%	23.32%	-5.07%	2.02%	NÃO

APÊNDICE D – ANÁLISE DE ADERÊNCIA DO MODELO BLACK-SCHOLES – GRUPO ILÍQUIDO

**APÊNDICE E – ANÁLISE DE ADERÊNCIA DO MODELO BLACK-SCHOLES –
GRUPO DE CONTROLE (EUA)**

1/0	Nome	X	Data	Du	Spot	Pré	Melhor Compra	Média	Melhor Venda	Vol Compra	Vol Média	Vol Venda	Realizada	Dif Realizada	DifVol	Aderente
1	SPY	209.00	08/abr/15	26	207.96	0.25%	2.89	2.90	2.90	12.58%	12.60%	12.62%	13.52%	-0.92%	0.04%	SIM
1	SPY	208.00	08/abr/15	50	207.96	0.42%	5.00	5.02	5.04	14.38%	14.43%	14.49%	11.95%	2.48%	0.11%	SIM
1	SPY	209.00	08/abr/15	69	207.96	0.38%	5.27	5.29	5.31	13.93%	13.98%	14.03%	13.40%	0.58%	0.09%	SIM
1	SPY	208.00	08/abr/15	113	207.96	0.41%	7.82	7.85	7.88	15.21%	15.26%	15.32%	12.66%	2.61%	0.11%	SIM
1	SPY	210.00	08/abr/15	176	207.96	0.59%	8.78	8.83	8.87	15.03%	15.10%	15.16%	12.85%	2.25%	0.13%	SIM
1	SPY	211.00	08/abr/15	193	207.96	0.72%	8.66	8.72	8.78	14.70%	14.78%	14.86%	12.49%	2.29%	0.17%	SIM
1	SPY	210.00	08/abr/15	236	207.96	0.72%	10.55	10.74	10.93	15.16%	15.40%	15.64%	11.69%	3.72%	0.48%	NÃO
1	SPY	210.00	08/abr/15	299	207.96	0.86%	12.29	12.55	12.81	15.18%	15.47%	15.76%	11.46%	4.02%	0.58%	NÃO
1	SPY	210.00	08/abr/15	362	207.96	1.03%	13.84	14.16	14.48	14.93%	15.25%	15.58%	11.46%	3.79%	0.65%	NÃO
1	SPY	210.00	08/abr/15	424	207.96	1.21%	15.22	15.57	15.92	14.49%	14.82%	15.15%	11.35%	3.48%	0.66%	NÃO
1	SPY	215.00	08/abr/15	446	207.96	1.27%	13.20	13.61	14.01	14.00%	14.37%	14.74%	11.21%	3.16%	0.74%	NÃO
1	SPY	220.00	08/abr/15	485	207.96	1.38%	11.27	12.15	13.03	13.01%	13.78%	14.56%	11.45%	2.34%	1.55%	SIM
1	ESA	2,080.00	08/abr/15	27	2,074.75	0.26%	31.00	31.25	31.50	12.38%	12.47%	12.56%	13.38%	-0.91%	0.18%	SIM
1	ESA	2,080.00	08/abr/15	51	2,074.75	0.42%	47.50	47.75	48.00	13.45%	13.51%	13.58%	12.15%	1.36%	0.13%	SIM
1	ESA	2,080.00	08/abr/15	70	2,067.00	0.38%	54.00	54.50	55.00	13.84%	13.96%	14.07%	13.60%	0.35%	0.23%	SIM
1	ESA	2,080.00	08/abr/15	114	2,067.00	0.41%	75.75	76.25	76.75	14.79%	14.88%	14.97%	12.81%	2.06%	0.18%	SIM
1	ESA	2,080.00	08/abr/15	176	2,059.50	0.59%	97.25	97.88	98.50	15.60%	15.69%	15.79%	12.97%	2.72%	0.18%	SIM
1	ESA	2,080.00	08/abr/15	237	2,055.75	0.72%	116.5	117.4	118.2	16.15%	16.26%	16.37%	11.79%	4.46%	0.22%	NÃO
1	EEM	42.00	08/abr/15	7	42.40	0.26%	0.72	0.74	0.76	17.55%	18.31%	19.06%	15.11%	3.20%	1.51%	SIM
1	EEM	42.50	08/abr/15	27	42.40	0.26%	0.91	0.93	0.95	17.20%	17.57%	17.93%	20.12%	-2.56%	0.72%	SIM
1	EEM	42.50	08/abr/15	51	42.40	0.42%	1.30	1.32	1.34	17.49%	17.76%	18.02%	19.13%	-1.37%	0.53%	SIM
1	EEM	42.00	08/abr/15	70	42.40	0.38%	1.70	1.74	1.78	18.88%	19.33%	19.79%	18.92%	0.42%	0.91%	SIM
1	EEM	42.50	08/abr/15	114	42.40	0.41%	1.84	1.88	1.91	17.95%	18.26%	18.57%	18.37%	-0.11%	0.62%	SIM
1	EEM	42.50	08/abr/15	176	42.40	0.59%	2.43	2.48	2.53	19.41%	19.77%	20.13%	17.56%	2.21%	0.72%	SIM
1	EEM	43.00	08/abr/15	194	42.40	0.72%	2.23	2.30	2.37	18.69%	19.17%	19.66%	17.10%	2.08%	0.96%	SIM
1	EEM	43.00	08/abr/15	237	42.40	0.72%	2.54	2.62	2.70	18.95%	19.44%	19.94%	16.09%	3.35%	1.00%	SIM
1	EEM	44.00	08/abr/15	447	42.40	1.27%	3.15	3.35	3.55	16.95%	17.86%	18.76%	17.60%	0.25%	1.81%	SIM
1	EWZ	34.50	08/abr/15	7	34.24	0.26%	0.57	0.59	0.61	30.25%	31.14%	32.02%	21.98%	9.16%	1.77%	NÃO
1	EWZ	35.00	08/abr/15	27	34.24	0.26%	1.04	1.06	1.07	30.62%	30.96%	31.29%	36.86%	-5.90%	0.68%	SIM
1	EWZ	35.00	08/abr/15	51	34.24	0.42%	1.53	1.57	1.61	30.18%	30.83%	31.48%	35.28%	-4.45%	1.30%	SIM
1	EWZ	35.00	08/abr/15	70	34.24	0.38%	1.76	1.79	1.81	28.92%	29.27%	29.62%	35.17%	-5.90%	0.69%	NÃO
1	EWZ	35.00	08/abr/15	114	34.24	0.41%	2.27	2.30	2.32	28.09%	28.36%	28.63%	36.25%	-7.89%	0.54%	NÃO
1	EWZ	36.00	08/abr/15	194	34.24	0.72%	2.56	2.65	2.73	26.84%	27.55%	28.26%	36.80%	-9.25%	1.42%	NÃO

1	EWZ	39.00	08/abr/15	447	34.24	1.27%	2.56	3.06	3.55	22.15%	24.87%	27.60%	29.91%	-5.03%	5.45%	NÃO
1	FXI	49.00	08/abr/15	27	49.21	0.26%	1.87	1.90	1.93	27.40%	27.87%	28.33%	27.88%	-0.02%	0.94%	SIM
1	FXI	49.00	08/abr/15	51	49.21	0.42%	2.38	2.42	2.45	25.58%	25.98%	26.38%	25.02%	0.96%	0.80%	SIM
1	FXI	48.00	08/abr/15	70	49.21	0.38%	3.00	3.10	3.20	26.97%	27.96%	28.95%	24.39%	3.57%	1.98%	SIM
1	FXI	49.00	08/abr/15	95	49.21	0.37%	2.82	2.90	2.97	25.55%	26.18%	26.81%	25.40%	0.78%	1.26%	SIM
1	FXI	48.00	08/abr/15	194	49.21	0.72%	4.25	4.38	4.50	25.15%	25.90%	26.65%	22.33%	3.57%	1.50%	SIM
1	FXI	49.00	08/abr/15	447	49.21	1.27%	5.40	5.65	5.90	24.43%	25.44%	26.46%	21.48%	3.96%	2.03%	SIM
1	PBR	7.00	08/abr/15	7	6.99	0.26%	0.24	0.26	0.28	52.62%	56.93%	61.24%	53.47%	3.46%	8.62%	SIM
1	PBR	7.00	08/abr/15	27	6.99	0.26%	0.55	0.57	0.59	60.75%	62.95%	65.16%	67.68%	-4.72%	4.41%	SIM
1	PBR	7.00	08/abr/15	70	6.99	0.38%	0.88	0.91	0.93	60.20%	61.93%	63.65%	80.13%	-18.20%	3.45%	NÃO
1	PBR	8.00	08/abr/15	194	6.99	0.72%	1.04	1.08	1.12	56.97%	58.61%	60.24%	73.68%	-15.08%	3.27%	NÃO
1	PBR	10.00	08/abr/15	447	6.99	1.27%	1.25	1.31	1.36	55.38%	56.87%	58.36%	56.94%	-0.07%	2.98%	SIM
1	EWY	59.00	08/abr/15	7	58.70	0.26%	0.42	0.44	0.46	14.19%	14.72%	15.24%	17.52%	-2.81%	1.04%	SIM
1	EWY	59.00	08/abr/15	27	58.70	0.26%	0.95	0.99	1.02	14.13%	14.59%	15.05%	18.27%	-3.68%	0.92%	NÃO
1	EWY	59.00	08/abr/15	70	58.70	0.38%	1.74	1.78	1.82	15.02%	15.34%	15.67%	15.32%	0.02%	0.65%	SIM
1	EWY	59.00	08/abr/15	133	58.70	0.45%	2.66	2.80	2.93	16.09%	16.88%	17.67%	15.07%	1.81%	1.59%	SIM
1	EWY	59.00	08/abr/15	194	58.70	0.72%	3.10	3.38	3.65	15.04%	16.38%	17.72%	14.44%	1.94%	2.68%	SIM
1	EWY	61.00	08/abr/15	447	58.70	1.27%	4.45	4.93	5.40	15.64%	17.17%	18.69%	15.99%	1.17%	3.05%	SIM
1	SPY	209.00	13/mai/15	25	210.38	0.24%	4.08	4.10	4.11	14.15%	14.21%	14.27%	10.28%	3.93%	0.11%	NÃO
1	SPY	209.00	13/mai/15	44	210.38	0.38%	5.04	5.07	5.10	13.41%	13.50%	13.58%	11.01%	2.49%	0.17%	SIM
1	SPY	209.00	13/mai/15	69	210.38	0.39%	6.43	6.45	6.46	13.79%	13.83%	13.86%	10.88%	2.95%	0.07%	NÃO
1	SPY	209.00	13/mai/15	88	210.38	0.46%	7.25	7.28	7.30	14.56%	14.61%	14.66%	12.25%	2.36%	0.10%	SIM
1	SPY	211.00	13/mai/15	151	210.38	0.61%	8.42	8.46	8.49	14.61%	14.67%	14.72%	13.09%	1.58%	0.11%	SIM
1	SPY	208.00	13/mai/15	168	210.38	0.65%	10.76	10.82	10.88	15.24%	15.33%	15.42%	13.09%	2.24%	0.18%	SIM
1	SPY	210.00	13/mai/15	211	210.38	0.73%	10.98	11.18	11.38	15.12%	15.38%	15.64%	12.36%	3.02%	0.53%	SIM
1	SPY	210.00	13/mai/15	274	210.38	0.86%	12.84	13.10	13.36	15.20%	15.50%	15.80%	11.37%	4.13%	0.60%	NÃO
1	SPY	215.00	13/mai/15	337	210.38	1.03%	11.83	12.06	12.28	14.47%	14.70%	14.94%	11.70%	3.00%	0.47%	NÃO
1	SPY	220.00	13/mai/15	399	210.38	1.20%	11.26	11.43	11.59	14.07%	14.23%	14.39%	11.32%	2.92%	0.32%	NÃO
1	SPY	215.00	13/mai/15	421	210.38	1.26%	13.97	14.32	14.66	14.12%	14.44%	14.76%	11.35%	3.08%	0.64%	NÃO
1	SPY	215.00	13/mai/15	460	210.38	1.37%	14.77	15.28	15.79	13.72%	14.18%	14.63%	11.18%	3.00%	0.91%	NÃO
1	ESA	2,080.00	13/mai/15	26	2,098.25	0.25%	44.75	45.00	45.25	13.03%	13.13%	13.22%	10.58%	2.55%	0.19%	SIM
1	ESA	2,100.00	13/mai/15	45	2,090.25	0.38%	40.25	40.63	41.00	12.74%	12.84%	12.95%	10.69%	2.15%	0.21%	SIM
1	ESA	2,100.00	13/mai/15	70	2,090.25	0.39%	54.25	54.63	55.00	13.41%	13.49%	13.58%	10.71%	2.78%	0.17%	NÃO
1	ESA	2,100.00	13/mai/15	89	2,090.25	0.46%	64.00	64.38	64.75	13.87%	13.94%	14.02%	12.50%	1.44%	0.15%	SIM
1	ESA	2,100.00	13/mai/15	151	2,082.75	0.61%	88.25	88.88	89.50	15.02%	15.12%	15.22%	13.43%	1.68%	0.20%	SIM
1	ESA	2,100.00	13/mai/15	212	2,078.75	0.73%	109.7	110.4	111.0	15.81%	15.89%	15.97%	12.71%	3.18%	0.17%	SIM
1	EEM	42.50	13/mai/15	26	42.53	0.25%	0.92	0.94	0.95	16.51%	16.79%	17.06%	13.79%	3.00%	0.55%	SIM

1	EEM	42.50	13/mai/15	45	42.53	0.38%	1.10	1.13	1.15	17.56%	17.92%	18.27%	16.95%	0.97%	0.71%	SIM
1	EEM	42.00	13/mai/15	70	42.53	0.39%	1.69	1.73	1.76	17.97%	18.37%	18.76%	16.61%	1.76%	0.79%	SIM
1	EEM	42.00	13/mai/15	89	42.53	0.46%	1.92	1.96	1.99	18.14%	18.49%	18.84%	17.70%	0.79%	0.70%	SIM
1	EEM	42.00	13/mai/15	151	42.53	0.61%	2.62	2.67	2.71	20.26%	20.61%	20.96%	17.63%	2.98%	0.70%	SIM
1	EEM	42.00	13/mai/15	169	42.53	0.65%	2.73	2.75	2.77	20.21%	20.36%	20.51%	17.81%	2.55%	0.29%	SIM
1	EEM	43.00	13/mai/15	212	42.53	0.73%	2.51	2.56	2.61	19.55%	19.88%	20.21%	16.94%	2.94%	0.66%	SIM
1	EEM	44.00	13/mai/15	422	42.53	1.26%	3.40	3.50	3.60	18.43%	18.89%	19.36%	16.95%	1.94%	0.93%	SIM
1	EWZ	36.00	13/mai/15	26	36.27	0.25%	1.44	1.48	1.52	28.05%	28.92%	29.79%	23.15%	5.77%	1.74%	SIM
1	EWZ	36.00	13/mai/15	45	36.27	0.38%	1.66	1.71	1.76	24.82%	25.65%	26.47%	30.28%	-4.63%	1.65%	SIM
1	EWZ	36.00	13/mai/15	89	36.27	0.46%	2.31	2.36	2.41	25.08%	25.66%	26.25%	32.24%	-6.57%	1.17%	NÃO
1	EWZ	38.00	13/mai/15	169	36.27	0.65%	2.26	2.33	2.39	24.67%	25.22%	25.77%	38.60%	-13.38%	1.10%	NÃO
1	EWZ	39.00	13/mai/15	422	36.27	1.26%	3.10	3.50	3.90	20.82%	22.96%	25.09%	30.06%	-7.10%	4.28%	NÃO
1	EWY	60.00	13/mai/15	26	59.78	0.25%	1.03	1.06	1.08	14.72%	15.05%	15.37%	15.69%	-0.64%	0.65%	SIM
1	EWY	60.00	13/mai/15	45	59.78	0.38%	1.45	1.50	1.54	15.24%	15.69%	16.13%	16.39%	-0.70%	0.89%	SIM
1	EWY	61.00	13/mai/15	169	59.78	0.65%	2.58	2.79	3.00	15.42%	16.50%	17.57%	15.06%	1.44%	2.15%	SIM
1	EWY	62.00	13/mai/15	422	59.78	1.26%	4.60	4.95	5.30	16.27%	17.41%	18.54%	15.37%	2.04%	2.27%	SIM
1	FXI	49.00	13/mai/15	26	49.32	0.25%	1.76	1.79	1.81	25.26%	25.66%	26.06%	29.14%	-3.47%	0.80%	SIM
1	FXI	49.00	13/mai/15	45	49.32	0.38%	2.06	2.10	2.14	27.38%	27.87%	28.36%	28.70%	-0.83%	0.98%	SIM
1	FXI	49.00	13/mai/15	70	49.32	0.39%	2.52	2.55	2.58	26.37%	26.66%	26.95%	25.62%	1.04%	0.59%	SIM
1	FXI	49.50	13/mai/15	132	49.32	0.57%	3.20	3.25	3.30	26.54%	26.90%	27.26%	25.52%	1.38%	0.72%	SIM
1	FXI	48.00	13/mai/15	169	49.32	0.65%	4.25	4.35	4.45	26.74%	27.38%	28.02%	24.45%	2.93%	1.29%	SIM
1	FXI	48.00	13/mai/15	192	49.32	0.70%	4.55	4.63	4.70	27.30%	27.75%	28.21%	23.66%	4.09%	0.91%	SIM
1	FXI	47.00	13/mai/15	422	49.32	1.26%	6.60	6.80	7.00	26.59%	27.44%	28.29%	21.51%	5.93%	1.70%	NÃO
1	IWM	123.00	13/mai/15	25	122.73	0.24%	2.29	2.30	2.30	15.60%	15.64%	15.67%	12.77%	2.87%	0.06%	SIM
1	IWM	122.00	13/mai/15	44	122.73	0.38%	3.59	3.60	3.61	15.54%	15.59%	15.64%	12.67%	2.92%	0.10%	SIM
1	IWM	122.00	13/mai/15	69	122.73	0.39%	4.54	4.58	4.61	17.05%	17.19%	17.32%	12.09%	5.10%	0.28%	NÃO
1	IWM	121.00	13/mai/15	131	122.73	0.57%	7.06	7.12	7.18	19.14%	19.31%	19.48%	14.89%	4.42%	0.35%	NÃO
1	IWM	121.00	13/mai/15	168	122.73	0.65%	7.90	7.96	8.02	19.09%	19.24%	19.39%	16.08%	3.16%	0.31%	SIM
1	IWM	122.00	13/mai/15	211	122.73	0.73%	8.39	8.47	8.55	19.21%	19.40%	19.58%	15.40%	4.00%	0.36%	NÃO
1	IWM	126.00	13/mai/15	421	122.73	1.26%	10.05	10.18	10.31	17.62%	17.83%	18.04%	15.25%	2.59%	0.42%	SIM
1	PBR	11.00	13/mai/15	45	9.97	0.38%	0.49	0.52	0.54	51.96%	53.48%	55.00%	58.62%	-5.14%	3.04%	SIM
1	PBR	10.00	13/mai/15	169	9.97	0.65%	1.49	1.54	1.59	45.77%	47.35%	48.93%	77.81%	-30.45%	3.16%	NÃO
1	PBR	13.00	13/mai/15	422	9.97	1.26%	1.30	1.35	1.40	42.34%	43.31%	44.28%	58.12%	-14.81%	1.94%	NÃO
		Média	164		0.62%	11.95	12.11	12.26	21.26%	21.80%	22.34%	21.59%	0.21%	1.09%		
													desvio padrao	5.46%		